

Kapitel 4

Das Modell KAMM mit Wolkenmodul

Die Konsequenz aus den Überlegungen der vorigen Kapitel ist ein Gleichungssystem, das es ermöglicht, hochreichende Konvektion sowohl über ebenem oder sonstwie idealisiertem Gelände genauso wie über der realen topographischen Struktur der Oberrheinregion zu behandeln. Gleichzeitig wird die Höhe des Modellgebiets nicht mehr durch eine zu weitgehende Approximation der Kontinuitätsgleichung eingeschränkt. Damit eignet sich das Modell sowohl für grundlagenorientierte Studien als auch für hydrologische Anwendungen und kann weiterhin in gleicher Weise wie die bisherige Version von KAMM für die am Institut sonst gebräuchlichen Anwendungen benutzt werden.

4.1 Gleichungssystem für hochreichende Feuchtkonvektion

Der Hauptgedanke bei der Weiterentwicklung von KAMM zur jetzigen Wolkenphysik–Version in Fortran90 war es, das Modell zu erweitern, nicht aber grundsätzlich in seinem Aufbau und Ablauf zu ändern. In diesem Falle wäre nämlich eine gänzliche Neuprogrammierung des Codes sinnvoller gewesen, wie sie z. B. bei der Entwicklung von KAMM2 (Förstner, 1998) durchgeführt wurde.

Es kommt daher auch in der Wolkenphysik–Version das linkshändige Koordinatensystem mit dimensionsloser Vertikalkoordinate η zum Einsatz

$$Z = Z(\eta) = a(1 - \eta)^2 + b(1 - \eta) = H \frac{z - h(x, y)}{H - h(x, y)} \quad ,$$

das bereits von Dorwarth (1985), Adrian und Fiedler (1991) sowie Lenz (1996) beschrieben wurde. Die Horizontalkoordinaten dieses Bezugssystems bleiben von der Transformation unbeeinflusst, so daß für die transformierten Koordinaten X, Y, Z und den Impuls U, V, W gilt

$$\begin{aligned} X = x & \quad , & U = u \\ Y = y & \quad , & V = v \\ Z = Z[\eta(x, y, z)] & \quad , & W = d_t Z \quad . \end{aligned}$$

Wie in dem vorangegangenen Kapitel 3 wird das Modell aber für ein kartesisches Koordinatensystem formuliert, um die Anschaulichkeit ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu gewährleisten.

Man erhält dann im Gesamtüberblick für das modifizierte und erweiterte Atmosphärenmodell:

$$\begin{aligned}
 d_t \bar{u} &= \partial_t \bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{u} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{u})] = -c_p \bar{\Theta}_\rho \partial_x (\bar{\Pi}_d + \bar{\Pi}_a) + f(\bar{v} - \frac{\bar{\Theta}_\rho}{\Theta_{\rho 0}} v_0) - \hat{f} \bar{w} + \\
 & \hspace{20em} + \frac{A_u}{\bar{\rho}} \\
 d_t \bar{v} &= \partial_t \bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{v} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{v})] = -c_p \bar{\Theta}_\rho \partial_y (\bar{\Pi}_d + \bar{\Pi}_a) - f(\bar{u} - \frac{\bar{\Theta}_\rho}{\Theta_{\rho 0}} u_0) + \frac{A_v}{\bar{\rho}} \\
 d_t \bar{w} &= \partial_t \bar{w} + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{w} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{w})] = -c_p \bar{\Theta}_\rho \partial_z \bar{\Pi}_d + \hat{f}(\bar{u} - \frac{\bar{\Theta}_\rho}{\Theta_{\rho 0}} u_0) + \frac{A_w}{\bar{\rho}} \\
 \bar{\rho} &= \frac{p_{00}}{R_L \bar{\Theta}_\rho} \Pi_0^{c_v/R_L} \\
 \partial_t \bar{\rho} &= -\nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) \\
 0 &= \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\Theta}_\rho \bar{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot (\rho_0 \Theta_{\rho 0} \bar{\mathbf{v}}) \\
 d_t \bar{\Theta} &= \partial_t \bar{\Theta} + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{\Theta} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\Theta})] = \frac{L_{wd} Nu_c + L_{we} Fr + L_{ed} Nu_i - L_{wd} Ev}{\bar{\rho} c_p \Pi_0} - \\
 & \hspace{15em} - \frac{\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}}{\bar{\rho} c_p \Pi_0} + \frac{A_\Theta}{\bar{\rho}} \\
 d_t \bar{q}_d &= \partial_t \bar{q}_d + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{q}_d \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{q}_d)] = +\frac{1}{\bar{\rho}} [-Nu_c - Nu_i + Ev] + \frac{A_{qd}}{\bar{\rho}} \\
 \partial_t \bar{q}_c &+ \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{q}_c \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \{\bar{\mathbf{v}} + w_c \mathbf{e}_z\} \bar{q}_c)] = +\frac{1}{\bar{\rho}} [+Nu_c - Fr] - Au - Ak + Br + \frac{A_{qc}}{\bar{\rho}} \\
 \partial_t \bar{q}_i &+ \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{q}_i \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \{\bar{\mathbf{v}} + w_i \mathbf{e}_z\} \bar{q}_i)] = +\frac{1}{\bar{\rho}} [+Nu_i + Fr] + \frac{A_{qi}}{\bar{\rho}} \\
 \partial_t \bar{q}_r &+ \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{q}_r \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \{\bar{\mathbf{v}} + w_r \mathbf{e}_z\} \bar{q}_r)] = -\frac{1}{\bar{\rho}} Ev + Au + Ak - Br + \frac{A_{qr}}{\bar{\rho}} .
 \end{aligned}$$

Hinzu kommen noch die beiden Gleichungen des Boden–Vegetationsmodells (3.18) und (3.19) nach Lenz (1996) für Feuchte- und Temperaturprofile im Erdreich. Diese wurden formal unverändert übernommen.

4.1.1 Grundzustand

Die Berechnung des Grundzustandes erfordert im Fall hochreichender Konvektion wesentlich mehr Aufwand als bisher. Jetzt werden nämlich nur noch folgende Annahmen gemacht:

- Geostrophie auf einer f, \hat{f} -Ebene,
- Hydrostasie mit variabler Schwerebeschleunigung $g(\phi, z)$,
- keine Vertikalbewegung, d. h. $w_0 = 0$.

Sie sind weit weniger einschränkend als beim bisherigen KAMM. Die Gleichungen zur Bestimmung des Grundzustands lauten dann wiederum für ein Kräftegleichgewicht

$$d_t u_0 = 0 = -c_p \Theta_{\rho 0} \partial_x \Pi_0 + f v_0 - \hat{f} w_0 \quad (4.1)$$

$$d_t v_0 = 0 = -c_p \Theta_{\rho 0} \partial_y \Pi_0 - f u_0 \quad (4.2)$$

$$d_t w_0 = 0 = -c_p \Theta_{\rho 0} \partial_z \Pi_0 - g + \hat{f} u_0 \quad (4.3)$$

$$0 = \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) \quad (4.4)$$

$$0 = \nabla \cdot (\rho_0 \Theta_{\rho 0} \mathbf{v}_0) \quad (4.5)$$

Die Modellgl. (4.11–4.15) werden danach wie bisher für die Abweichung von diesem Grundzustand formuliert, d. h. die prognostischen Größen werden aufgespalten in Grundzustand und mesoskalige Abweichung $\Xi = \xi_0 + \xi$, wobei der Auftriebsstördruck Π_a nun über

$$c_p \bar{\Theta}_\rho \partial_z \Pi_a = g(\phi, z) \frac{\bar{\Theta}_\rho - \Theta_{\rho 0}}{\Theta_{\rho 0}}$$

definiert wird und mit der potentiellen Dichtetemperatur Θ_ρ

$$\Theta_\rho = \Theta \left[1 + \left(\frac{R_D}{R_L} - 1 \right) q_d - q_c - q_i - q_r \right]$$

auch die Hydrometeore Wolkenwasser q_c , Wolkeneis q_i und Niederschlag q_r berücksichtigt werden. Auffällig ist dabei, daß der Grundzustand wegen seiner Stationarität sowohl die Kontinuitätsgl. (4.4) als zusätzlich auch die Anelastizitätsbedingung (4.5) erfüllen muß. Die erste Forderung ist aber bei Geostrophie trivial, lediglich Gl. (4.5) stellt eine nutzbare Bedingung dar.

Die Schwerebeschleunigung muß bei hochreichender Konvektion zumindest die Höhenabhängigkeit enthalten, um auch im Tropopausen- und unteren Stratosphärenniveau die Standardatmosphäre exakt reproduzieren zu können. Aus der Arbeit von Möller (1973) entnimmt man für die Schwerebeschleunigung als Funktion der geographischen Breite ϕ und der Höhe z in m ü. NN die folgende Zahlenwertgleichung für g in m s^{-2} :

$$g(\phi, z) = 9.80616 (1 - \pi \times 10^{-7} z) (1 - 2.6373 \times 10^{-3} \cos 2\phi - 5.9 \times 10^{-6} \cos^2 2\phi) \quad .$$

Weil für den Grundzustand als Profil-Eingabegrößen $u_0(z)$, $v_0(z)$, $\Theta_0(z)$ und die relative Luftfeuchte $\text{RH}_0(z)$ vorliegen¹, in der Berechnung des Grundzustandes aber die verallgemeinerte virtuell-potentielle Temperatur $\Theta_{\rho 0}$ vorkommt, ist bei der Initialisierung eine iterative Berechnung notwendig:

- aus den Initialwerten von Π_0 , Θ_0 und RH_0 am Erdboden werden zunächst die Bodenwerte von q_{d0} und $\Theta_{\rho 0}$ ermittelt,
- in einem zweiten Schritt wird dann Π_0 unter Vernachlässigung der Feuchte vertikal bis zur Höhe H integriert mit

$$\Pi_0 = \int \partial_z \Pi_0 dz = - \int \frac{g - \hat{f} u_0}{c_p \Theta_0} dz \quad ,$$

¹Auch die Hydrometeorgehalte könnten durchaus bereits mit Anfangsprofilen vorgegeben werden.

- mit diesem Schätzprofil für Π_0 wird in der eigentlichen Iteration gleichzeitig q_{d0} aus RH_0 , daraus $\Theta_{\rho 0}$ und schließlich die neue Schätzung für Π_0 berechnet.

Da das Modell aber wegen der Aufspaltung der Variablen in Grundzustand und mesoskalige Abweichung auch $\Theta_0(x, y, z)$ benötigt und nicht nur als eindimensionale Funktion der Höhe z , wird aus den endgültigen Werten des Grundzustandes wiederum iterativ der Grundzustand der potentiellen Temperatur Θ_0 berechnet. Diese mehrfachen Iterationen konvergieren sehr schnell und müssen wegen der Stationarität des Grundzustands nur einmal durchgeführt werden. Auch von Klemp und Wilhelmson (1978) wird auf die Notwendigkeit solcher Iterationslösungen hingewiesen.

4.1.2 Gasgleichung

Die Gasgleichung im T - p - bzw. im Θ - Π System von KAMM lautet

$$\rho = \frac{p}{R_L T_\rho} \quad , \quad \bar{\rho} = \frac{p_{00}}{R_L \bar{\Theta}_\rho} \Pi_0^{c_v/R_L} \quad . \quad (4.6)$$

Hier bezeichnet

$$T_\rho = T \left[1 + \left(\frac{R_D}{R_L} - 1 \right) q_d - q_c - q_i - q_r \right]$$

die auf hydrometeorhaltige Luft verallgemeinerte virtuelle Temperatur. Die einzige Näherung, die sich bei dieser Form der Gasgleichung bemerkbar macht, besteht darin, daß die Exnerfunktion durch ihren als stationär angenommenen Grundzustandswert genähert wird: $\Pi \rightarrow \Pi_0(\mathbf{r})$, während die Dichte $\bar{\rho}$ aber von Ort und Zeit abhängt: $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\mathbf{r}, t)$. Dies führt letztlich dazu, daß die Luftdichte im Modell nicht nur mittels Gl. (4.6) diagnostiziert, sondern auch mithilfe der Kontinuitätsgleichung prognostiziert werden kann.

4.1.3 Kontinuitätsgleichung

Aufgrund der Zeitabhängigkeit von $\bar{\rho}$ entsteht auch die prognostische Form

$$\partial_t \bar{\rho} = -\nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) \quad . \quad (4.7)$$

Aus Gründen der numerischen Genauigkeit und Effizienz wird die Dichte $\bar{\rho}$ aber mit Gl. (4.6) diagnostiziert. Eine Prognose mit (4.7) wäre nicht nur rechenzeitintensiver, da zu diesem Zweck die Divergenz des Massenflusses bestimmt werden müßte; sie wäre auch ungenauer, weil durch die Verwendung eines zentrierten Gitters das numerische Verfahren anfällig für 2Δ und 4Δ -Wellen ist (Hugelmann, 1988), die der eigentlichen Lösung der Gleichungen ein gewisses Rauschen überlagern. Bei der numerischen Berechnung der Divergenz durch finite Differenzen führt dieses vom Betrag her kleine Rauschen zu deutlichen Fehlerspitzen, die bei einer Prognose von $\bar{\rho}$ zusätzlich noch über die Dichte dem Modell mitgeteilt würden, z. B. beim Auftriebsterm.

4.1.4 Anelastizitätsbedingung

Nach Hauf (1980) und unabhängig davon später Durran (1989, 1990), Fiedler (1990) sowie Nance und Durran (1994) lautet die allgemeinste Form der Anelastizitätsbedingung, die noch die Ausbreitung von

Schallwellen verhindert, aber die Atmosphäre weitestgehend als kompressibel annimmt,

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\Theta}_\rho \bar{\mathbf{v}}) = \nabla \cdot (\rho_0 \Theta_{\rho 0} \bar{\mathbf{v}}) = 0 \quad . \quad (4.8)$$

Eine weitere Bewertung dieser Bedingung findet man in der Arbeit von Stowasser (1996). Die Schallgeschwindigkeit c_s lautet jetzt mit der spezifischen Wärme c_v der Luft bei konstantem Volumen

$$c_s = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} R_L \bar{T}_\rho} = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} R_L \bar{\Theta}_\rho \Pi_0} \quad .$$

Der Wert für c_s legt der numerischen Lösung der Gleichungen aber keine Beschränkung auf, da aufgrund der Anelastizitätsbedingung (4.8) und der von Hauf (1980) vorgegebenen Wahl der Form des Advektionsterms der prognostischen Gleichungen keine Schallwellen im System auftreten können. Die höchsten Werte der Phasengeschwindigkeit c_{ph} von Schwerewellen erreichen nur etwa $c_{ph} \approx 1/3 c_s$.

Poissongleichung für Π_d

Die Anwendung von Gl. (4.8) oder einer ihrer beiden restriktiveren Varianten

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\Theta}_\rho \mathbf{v}) &\equiv 0 \quad ; & \text{tiefe Konvektion} \\ \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}) &\equiv 0 \quad ; & \text{tiefe Konvektion} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &\equiv 0 \quad ; & \text{flache Konvektion} \end{aligned}$$

führt auf eine Poissongleichung und ermöglicht bis auf eine Konstante die Bestimmung des dynamischen Stördrucks Π_d durch Lösung eines Neumann-Problems.

Alle drei Varianten der Anelastizitätsbedingung können in der gemeinsamen Form

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}) \equiv 0 \quad (4.9)$$

geschrieben werden. Dabei bezeichnet $\Phi = \Phi(\mathbf{r})$ eine skalare Feldfunktion, für die gilt:

$$\Phi \in \{1, \rho_0, \bar{\rho} \bar{\Theta}_\rho\} \quad .$$

Formal wird dann stets dieselbe Poissongleichung gelöst, allein durch die Wahl von Φ legt der Benutzer fest, wie weit die Approximationen des Gleichungssystems gehen sollen.

Die elliptische Gleichung vom Poisson-Typ für den dynamischen Stördruck Π_d entsteht, wenn man die allgemeine Anelastizitätsbedingung (4.9) auf die vektorielle Impulsgleichung anwendet und die räumliche mit der zeitlichen Differentiation vertauscht:

$$\nabla \cdot \partial_t (\Phi \mathbf{v}) = \partial_t [\nabla \cdot (\Phi \mathbf{v})] = 0 = \nabla \cdot \left\{ \frac{\Phi}{\bar{\rho}} [\mathbf{v} \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v} \mathbf{v})] \right\} - c_p \nabla \cdot (\Phi \bar{\Theta}_\rho \nabla \Pi_d) + \nabla \cdot \mathbf{Q} \quad ,$$

wobei \mathbf{Q} die Quellterme der Impulsbilanz bezeichnet. Umstellen liefert schließlich

$$c_p [\Phi \bar{\Theta}_\rho \nabla^2 + \nabla (\Phi \bar{\Theta}_\rho) \cdot \nabla] \Pi_d = \nabla \cdot \left\{ \frac{\Phi}{\bar{\rho}} [\mathbf{v} \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) - \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v} \mathbf{v})] \right\} + \nabla \cdot \mathbf{Q} \quad . \quad (4.10)$$

Diese Gleichung erfüllt die Bedingungen für Elliptizität, allerdings mit dem Sonderfall ortsabhängiger Koeffizienten $\Phi \bar{\Theta}_\rho$. Für die in dieser Dissertation verwendete Bedingung (4.8) lauten diese also $\bar{\rho} \bar{\Theta}_\rho^2$.

4.1.5 Impulsgleichung

Die Impulsgleichungen lauten

$$\partial_t \bar{u} + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{u} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{u})] = -c_p \bar{\Theta}_\rho \partial_x (\bar{\Pi}_d + \bar{\Pi}_a) + f(\bar{v} - \frac{\bar{\Theta}_\rho}{\Theta_{\rho 0}} v_0) - \hat{f} \bar{w} + \frac{A_u}{\bar{\rho}} \quad (4.11)$$

$$\partial_t \bar{v} + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{v} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{v})] = -c_p \bar{\Theta}_\rho \partial_y (\bar{\Pi}_d + \bar{\Pi}_a) - f(\bar{u} - \frac{\bar{\Theta}_\rho}{\Theta_{\rho 0}} u_0) + \frac{A_v}{\bar{\rho}} \quad (4.12)$$

$$\partial_t \bar{w} + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{w} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{w})] = -c_p \bar{\Theta}_\rho \partial_z \bar{\Pi}_d + \hat{f}(\bar{u} - \frac{\bar{\Theta}_\rho}{\Theta_{\rho 0}} u_0) + \frac{A_w}{\bar{\rho}} \quad (4.13)$$

und weisen im Vergleich zum bisherigen Stand von KAMM folgende Neuerungen auf:

- die Advektion wurde gemäß der Analyse von Hauf (1980) für tiefe Konvektion in Flußform geschrieben. Nur falls eine Simulation mit der nach wie vor wählbaren Option der flachen Konvektion mit $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ durchgeführt werden soll, wäre wieder die Eulerform von $d_t \mathbf{v}$ zu verwenden,
- die virtuell–potentielle Temperatur Θ_v wurde durch ihre Verallgemeinerung Θ_ρ auf ein System mit Hydrometeoren ersetzt,
- die Corioliskraft ist mit allen Komponenten enthalten.

An der Transformation des Auftriebsterms aus der dritten Bewegungsgl. (4.13) hin zu den Auftriebsdruckgradienten $\nabla_h \Pi_a$ in den Gln. (4.11–4.12) nach Das (1979) und Houze (1993) wurde nichts verändert.

Lediglich bei der Diskussion der Einflüsse von Temperatur, Feuchte und Hydrometeorgehalten auf die zeitliche Änderung der Vertikalgeschwindigkeit w in Kapitel 5 wird aus Gründen der Anschaulichkeit auf eine Form der Gl. (4.13) zurückgegriffen, die den Auftriebsterm explizit enthält, bei der Integration der Modellgleichungen aber nicht zum Einsatz kommt:

$$d_t w \propto -c_p \bar{\Theta}_\rho \partial_z \bar{\Pi}_d + g \frac{\bar{\Theta}_\rho - \Theta_{\rho 0}}{\Theta_{\rho 0}} .$$

4.1.6 Wärmeleichung

Neben der Neuformulierung des Transportterms auf der linken Seite von Gl. (4.14) fallen hier vor allem die neu hinzugekommenen Quellterme auf der rechten Seite auf. Die Terme, die die Umwandlungswärmen L_ξ bei Phasenübergängen enthalten, gehören zum Wolkenmodell und werden unter dem Abschnitt 4.1.11 näher erläutert. Sie beschreiben die zeitliche Änderung der Entropie durch die Bildung (Nu_c, Nu_i) bzw. das Gefrieren oder Verdunsten (Fr, Ev) von Hydrometeoren:

$$\partial_t \bar{\Theta} + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{\Theta} \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{\Theta})] = \frac{L_{wd} Nu_c + L_{we} Fr + L_{ed} Nu_i - L_{wd} Ev}{\bar{\rho} c_p \bar{\Pi}_0} - \frac{\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}}{\bar{\rho} c_p \bar{\Pi}_0} + \frac{A_\Theta}{\bar{\rho}} . \quad (4.14)$$

Der Term proportional zu $\nabla \cdot \bar{\mathbf{S}}$ auf der rechten Seite bezeichnet die Strahlungsflußdivergenz, die jedoch nur am Erdboden innerhalb des Boden–Vegetationsmodells berücksichtigt wird. Für die in dieser Arbeit geplanten Simulationen relativ kurzlebiger konvektiver Wolken ist diese Vereinfachung gerechtfertigt, aber für Berechnungen langanhaltender Stratusbewölkung sollte die Divergenz der Strahlungsflüsse hinzugenommen werden, beispielsweise gemäß Stephens (1984) oder Rockel und Raschke (1994).

4.1.7 Feuchte- und Hydrometeorgleichungen

Zu der von der bisherigen Form des KAMM–Modells bekannten prognostischen Gleichung für die spezifische Feuchte q_d treten jetzt noch drei weitere Gleichungen für die Hydrometeorgehalte Wolkenwasser q_c , Wolkeneis q_i und Niederschlag q_r hinzu, die analog zur spezifischen Feuchte q_d Partialmassen sind:

$$\partial_t \bar{q}_d + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{q}_d \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \bar{q}_d)] = + \frac{1}{\bar{\rho}} [-Nu_c - Nu_i + Ev] + \frac{A_{q_d}}{\bar{\rho}} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{q}_c + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{q}_c \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \{\bar{\mathbf{v}} + w_c \mathbf{e}_z\} \bar{q}_c)] = & + \frac{1}{\bar{\rho}} [+Nu_c - Fr] - Au - Ak + Br + \\ & + \frac{A_{q_c}}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\partial_t \bar{q}_i + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{q}_i \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \{\bar{\mathbf{v}} + w_i \mathbf{e}_z\} \bar{q}_i)] = + \frac{1}{\bar{\rho}} [+Nu_i + Fr] + \frac{A_{q_i}}{\bar{\rho}} \quad (4.17)$$

$$\partial_t \bar{q}_r + \frac{1}{\bar{\rho}} [-\bar{q}_r \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{\mathbf{v}}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \{\bar{\mathbf{v}} + w_r \mathbf{e}_z\} \bar{q}_r)] = - \frac{1}{\bar{\rho}} Ev + Au + Ak - Br + \frac{A_{q_r}}{\bar{\rho}} \quad (4.18)$$

Die rechten Seiten dieser Gln. (4.15–4.18) sind nicht Null, sondern enthalten als Quellterme die Phasenumwandlungen Nu , Fr , Ev der Hydrometeore und des Wasserdampfs, sowie die Wechselwirkungsprozesse Au , Ak und Br zwischen den einzelnen Hydrometeoren. Die Auswahl dieser Prozesse lehnt sich an Kessler (1969) an und wird im Abschnitt 4.1.11 besprochen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt dieser Gln. (4.16–4.18) ist die Berücksichtigung der Endfallgeschwindigkeiten w_ξ sämtlicher Hydrometeorarten. Wie z. B. von Doms und Herbert (1985) diskutiert, wird die Sedimentation von Wolkenteilchen (hier q_c und q_i) meist vernachlässigt. In KAMM wird sie aber mitberücksichtigt, und die Ergebnisse werden aufzeigen, daß zumindest für das Wolkeneis eine Vernachlässigung von w_i nicht gerechtfertigt ist.

4.1.8 Austauschterme

Die Austauschterme A_ξ , die nach wie vor durch einen Gradientensatz beschrieben werden, lauten jeweils

$$A_\xi = -\nabla \cdot [-\bar{\rho} \nu_\xi \nabla \bar{\xi} + \bar{\rho} \overline{\mathbf{v}' \xi'}] = -\nabla \cdot [-(\mu_\xi + \bar{\rho} K_\xi) \nabla \bar{\xi}] \quad .$$

Man erkennt an der Form dieses Austauschterms, daß sowohl die Strömung der subskaligen Turbulenz, als auch die der molekularen Vermischung divergenzfrei angenommen wird. Außerdem wird jetzt in allen prognostischen Gleichungen des KAMM–Modells beim skalaren turbulenten Diffusionskoeffizienten K die molekulare Viskosität ν , bzw. μ mitgeführt, so daß der physikalisch sinnvolle Grenzwert $K \rightarrow 0$ für verschwindende Maschenweiten Δ möglich ist.

Einen gewissen Sonderfall bildet der turbulente Austausch beim Niederschlag. Hier wird A_{q_r} wahlweise wie A_v behandelt oder aber zu Null gesetzt, weil der schnell fallende Niederschlag auf Raumskalen von der Größenordnung der Maschenweite mesoskaliger numerischer Modelle nur unwesentlich von der subskaligen atmosphärischen Turbulenz betroffen ist. Zudem besteht eine große Unsicherheit bezüglich der Parametrisierung über einen K -Ansatz in diesem Fall. Testrechnungen zeigten überdies, daß eine Vernachlässigung des subskaligen Austauschs beim Regen die Ergebnisse kaum beeinflußt.

4.1.9 Boden- und Vegetationsmodell

Im Boden- und Vegetationsmodell nach Schädler (1990) und Lenz (1996) waren nur relativ geringe Modifikationen notwendig, so daß die Gleichungen für die Bodenfeuchte und -temperatur ihre bisherige Gestalt (3.18) und (3.19) beibehalten. Zur Klassifizierung unterschiedlicher Böden und Vegetationstypen wurde aber im Gegensatz zum bisherigen Stand von KAMM die Typisierung nach Lenz (1996) implementiert, die in der Tab. 4.1 im Überblick dargestellt ist. Hinzugefügt wurde noch der Bewuchsindex 0 für unbewachsenen Boden, der z. B. im Gebirge größere Gebiete umfassen kann.

Tabelle 4.1: Verwendete Boden- und Vegetationsklassifizierung, modifiziert nach Lenz (1996, S. 91–98). Dort sind auch die zugehörigen weiteren Parameter angegeben.

Index	Bodenart	Bewuchs / Bebauung
0	—	Nackter Boden
1	Lehmiger Sand	Besiedeltes Gebiet
2	Lehm	Gewässer
3	Schluffiger toniger Lehm	Laubwald
4	Toniger Lehm	Nadelwald
5	Ton	Mischwald
6	Torf	Sonderkulturen
7	Sandiger Lehm	Ackerflächen
8	Wasser	Wiesen und Weiden
9	—	Grünland / Brache

Eine substantielle Neuerung gegenüber früheren Versionen des Boden–Vegetationsmodells wird aber im Rahmen dieser Arbeit eingeführt: die Tiefe, bis zu der sich das nichtäquidistante Rechengitter im Boden erstreckt, wird ausgedehnt. Bisher waren hier 7 Schichten im Erdboden und eine maximale Tiefe von ca. 1.25 m fest vorgeschrieben. Schon die ersten Rechnungen mit Niederschlag zeigten aber, daß das Niederschlagswasser eines kräftigen Schauers ohne weiteres innerhalb der typischen Simulationszeiten für eine Wolkenmodellierung bis in diese Tiefe von etwa 1 m vordringen kann. Da als untere Randbedingungen dort aber die Vertikalgradienten von T_b und η_w verschwinden sollen, darf hier kein nennenswerter Zugewinn an Wasser

erfolgen, um diese Randbedingungen nicht zu verletzen. Es war also notwendig, die Tiefe des Modellgebiets im Boden zu vergrößern, um nicht am Modell selbst grundlegende Veränderungen vornehmen zu müssen. Weil sich die vertikalen Maschenweiten im Erdreich mit zunehmender Tiefe verdoppeln, wurde die feste Vorgabe von 7 Schichten im Erdreich fallengelassen und auf beliebige Schichtanzahlen ausgedehnt. Die Erfahrungen lehrten aber, daß bereits 8 Schichten genügen, um eine Verletzung der unteren Randbedingung für η_w zu umgehen.

Die unterste Gitterfläche liegt dann in ca. 2.5 m Tiefe und ist für den auf den Boden fallenden Niederschlag so gut wie unerreichbar. Die Initialisierung des auf beliebige Gitterpunktzahlen Nbz ausgedehnten Bodenmodells erfolgt dabei kompatibel zur bisherigen Version: in den obersten 7 Schichten wird die alte Initialisierung angewandt, aufgrund der homogenen Neumann–Randwerte am Unterrand können dann aber tiefenkonstante Profile für die Gitterpunkte $k = 8 \dots Nbz$ verwendet werden. Im weniger relevanten Fall von $Nbz < 7$ würde die bisherige Initialisierung auch angewandt, aber nicht bis 1 m Tiefe fortge-

führt. Die physikalisch motivierten Anfangsprofile stünden aber auch in dieser flachen Bodenschicht für eine Simulation zur Verfügung.

Die Berechnung der vom Vegetationsmodell benötigten turbulenten Flußgrößen u_* , Θ_* , q_* und L_* erfolgt in der überarbeiteten Version des Boden–Vegetationsmodells jetzt auch für Flächen mit Vegetation außerhalb dieses Programmmoduls. Diese Unabhängigkeit fördert die Pflege und Aktualisierbarkeit der beiden beteiligten Untermodule von KAMM (Dotzek und Emeis, 1996). Im Rahmen dieser Arbeiten, zu denen auch gehörte, die Formeln für den Sättigungsdampfdruck und das Sättigungsmischungsverhältnis denen des Wolkenmoduls anzupassen, wurde eine Unstimmigkeit bei der Behandlung des Transpirationsspeichers (Lenz, 1996) aufgrund eines Hinweises von Grabe (1998, pers. Mitteilung) behoben.

Als weitere Neuerung wurde die Variation der Solar konstanten S_{\odot} mit der Jahreszeit berücksichtigt. In dem Sinne, in dem sie in der Meteorologie verwendet wird, nämlich als von der Sonne her einfallende Strahlungsflußdichte am Oberrand der Atmosphäre, ist S_{\odot} nämlich durch die Exzentrizität der Erdbahn um die Sonne sehr wohl einer jahreszeitlichen Veränderung unterworfen. Die Schwankungen der Solarstrahlung, die durch die Sonnendynamik verursacht werden, sind da-

gegen vernachlässigbar klein in einer Größenordnung von $\pm 2 \text{ W m}^{-2}$ (Fröhlich, 1998, pers. Mitteilung). Die astronomische Variation von S_{\odot} ist aber proportional zum Quadrat des Quotienten der beiden Halbachsen der Erdbahn, d. h. mit den Werten nach Roedel (1992)

$$\Delta S_{\odot} = S_{\odot,0} \left[\left(\frac{1.52 \times 10^8 \text{ km}}{1.47 \times 10^8 \text{ km}} \right)^2 - 1 \right] \simeq 90 \text{ W m}^{-2} .$$

Die jahreszeitliche Variation der solaren Einstrahlung am Oberrand der Erdatmosphäre ist als Funktion des Julianischen Tages in Abb. 4.1 dargestellt. Die Amplitude ist nicht zu vernachlässigen. Deshalb wurde die entsprechende, von Xue et al. (1995) angegebene Formel mit dem von 0 bis 364 laufenden Julianischen Tag d_j und $d_{\odot} = 2\pi d_j/365$

$$S_{\odot} = 1353 \text{ W m}^{-2} [1.00011 + 0.034221 \cos d_{\odot} + 0.00128 \sin d_{\odot} + 0.000719 \cos 2d_{\odot} + 0.000077 \sin 2d_{\odot}]$$

in KAMM an den Stellen eingeflochten, an denen bisher der astronomische Mittelwert $S_{\odot,0} \simeq 1365.5 \text{ W m}^{-2}$ zur Anwendung kam.

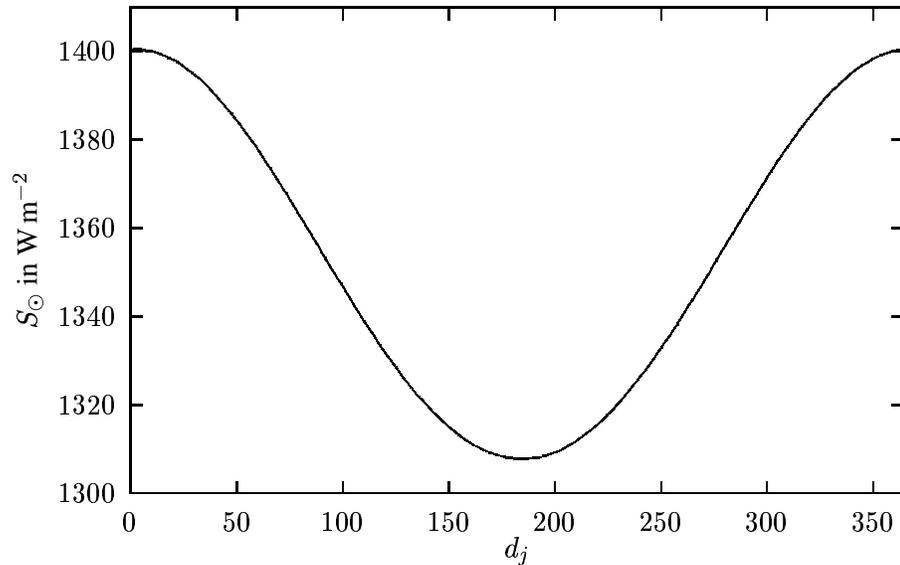


Abbildung 4.1: Jahreszeitliche Variation der Solar„konstanten“ S_{\odot} , definiert als Strahlungsflußdichte am Oberrand der Erdatmosphäre.

4.1.10 Grenzschichtparameter

Dimensionslose Profildfunktionen

Die dimensionslosen Profildfunktionen Ψ und die dimensionslosen Funktionen der Profildgradienten ϕ , die beide Funktionen der mit der Monin–Obuchow Länge L_* skalierten Vertikalkoordinate $\zeta = z/L_*$ sind, stellen den Kern der Mischungswegtheorie von Monin und Obuchow dar (Goering, 1958). Analytisch stehen die ϕ - und Ψ -Funktionen dabei ganz allgemein in folgendem Zusammenhang:

$$\phi_m(\zeta) = 1 - \zeta \frac{d\Psi_m(\zeta)}{d\zeta}, \quad \frac{d\Psi_m(\zeta)}{d\zeta} = \frac{1}{\zeta} - \frac{\phi_m(\zeta)}{\zeta}, \quad (4.19)$$

$$\phi_h(\zeta) = \frac{K_m}{K_h} - \zeta \frac{d\Psi_h(\zeta)}{d\zeta}, \quad \frac{d\Psi_h(\zeta)}{d\zeta} = \frac{K_m/K_h}{\zeta} - \frac{\phi_h(\zeta)}{\zeta}. \quad (4.20)$$

Darin bezeichnet $K_m/K_h = Pr_t$ die turbulente Prandtlzahl im Fall neutraler Schichtung der Atmosphäre. Die Integration der Gln. (4.19) und (4.20) erstreckt sich dabei stets von 0 bis ζ in der Vertikalen.

Die bisher im KAMM–Modell benutzten Funktionen für ϕ und Ψ , die „klassischen“ Businger–Dyer Beziehungen, gelten nur bei einer von Kármán–Konstanten $\kappa = 0.35$, während im KAMM–Modell wie heute allgemein üblich stets ein Wert $\kappa = 0.40$ vorausgesetzt wird. Zudem ist die Relation $Pr_t = K_m/K_h = 0.74$ nicht unumstritten. Daher sollten die Profildfunktionen für die Anwendung im KAMM–Modell in eine Form gebracht werden, die für $\kappa = 0.40$ und $K_m/K_h = 1$ gültig ist. Dies ist dank der Arbeiten von Höglström (1988, 1996) möglich geworden². Auch der schwierige Fall stark stabiler Schichtung kann mit einem nichtlinearen Profilanatz befriedigend beschrieben werden (Holtslag, 1984; van Ulden und Holtslag, 1985; Dotzek und Emeis, 1996). Als Ergebnis der Überlegungen ergibt sich folgender Satz dimensionsloser ϕ - und Ψ -Funktionen:

a) stabil: ($\zeta > 0$)

$$\begin{aligned} \phi_m &= 1 + 6.0\zeta e^{-0.44\zeta} \\ \Psi_m &= -13.64(1 - e^{-0.44\zeta}) \\ \Psi_m|_{z_0}^z &= \Psi_m(\zeta) - \Psi_m(\zeta_0) = -13.64(e^{-0.44\zeta} - e^{-0.44\zeta_0}) \\ \phi_h &= 1 + 7.8\zeta e^{-0.44\zeta} \\ \Psi_h &= -17.73(1 - e^{-0.44\zeta}) \\ \Psi_h|_{z_0}^z &= \Psi_h(\zeta) - \Psi_h(\zeta_0) = -17.73(e^{-0.44\zeta} - e^{-0.44\zeta_0}) \end{aligned}$$

b) labil: ($\zeta < 0$)

$$\begin{aligned} \phi_m &= (1 - 19.3\zeta)^{-1/4} \\ \Psi_m &= 2 \ln \frac{1+x}{2} + \ln \frac{1+x^2}{2} - 2 \arctan x + \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{1}{\phi_m(\zeta)} \\ \Psi_m|_{z_0}^z &= \Psi_m(\zeta) - \Psi_m(\zeta_0) = 2 \ln \frac{1+x}{1+x_0} + \ln \frac{1+x^2}{1+x_0^2} - 2 \arctan x + 2 \arctan x_0 \end{aligned}$$

²Jedoch führt der Autor darin an, daß auch $Pr_t = 0.95$ angebbar wäre und liefert die zugehörigen Ausdrücke für die Profildfunktionen. Zudem lassen neueste theoretische Erkenntnisse (Bergmann, 1998, und darin enthaltene Referenzen) aufgrund einer asymptotischen Betrachtung für unendlich große Reynoldszahlen eher einen Wert $\kappa = 1/e \simeq 0.37$ plausibel erscheinen.

$$\begin{aligned}\phi_h &= (1 - 12.0\zeta)^{-1/2} \\ \Psi_h &= 2 \ln \frac{1+x}{2} \quad , \quad x = \frac{1}{\phi_h(\zeta)} \\ \Psi_h|_{z_{0\Theta}}^z &= \Psi_h(\zeta) - \Psi_h(\zeta_{0\Theta}) = 2 \ln \frac{1+x}{1+x_{0\Theta}} .\end{aligned}$$

Die Integration der ϕ -Funktionen im Fall labiler Schichtung wurde von Paulson (1970), Nickerson und Smiley (1975) sowie Byun (1990) beschrieben, man kann sie aber auch leicht selbst ausführen mit Hilfe einer Integration der Partialbruchzerlegung von (4.19) und (4.20). Auf mögliche numerische Konvergenzprobleme im Fall nahezu neutraler Schichtung geht Benoit (1977) ein.

Berechnung der Grenzschichtskalen

Um die Flußgrößen u_* , w_* , Θ_* , q_* und L_* zu bestimmen, muß mit möglichst hoher Genauigkeit der Stabilitätsparameter $\zeta = z/L_*$, bzw. bei von Null verschiedener Verdrängungshöhe d genauer $\zeta = (z - d)/L_*$, bestimmt werden. Er legt die thermische Stabilität in der Prandtlschicht fest und ist die Variable der dimensionslosen Stabilitätsfunktionen Ψ_m und Ψ_h der Monin–Obuchow Theorie. In Abhängigkeit vom vertikalen Verlauf der potentiellen Temperatur Θ und der spezifischen Feuchte q_d ändert ζ Betrag und Vorzeichen durch eine entsprechende Änderung der Monin–Obuchow Länge L_* . Positive Werte von L_* oder ζ entsprechen stabiler, negative labiler Schichtung. Mit wachsendem Betrag von L_* strebt ζ von beiden Seiten gegen den Wert Null, der der thermisch neutralen Schichtung entspricht. Die Länge L_* ist definiert als

$$L_* = \frac{u_*^2 \Theta_\rho}{\kappa g \Theta_{\rho*}} \approx \frac{u_*^2 \Theta_\rho}{\kappa g \Theta_{v*}} . \quad (4.21)$$

Dies ist bei Beschränkung auf die virtuell–potentielle Form im Nenner äquivalent zu

$$L_* = \frac{u_*^3 \Theta_\rho}{\kappa g \frac{H_0}{\rho c_p} \left[1 + \left(\frac{R_d}{R_l} - 1 \right) q_d + \left(\frac{R_d}{R_l} - 1 \right) \Theta \frac{c_p}{L_{wd}} \frac{V_0}{H_0} \right]}$$

mit H_0 , V_0 als Strömen fühlbarer und latenter Wärme am Boden. Dabei sind

$$H_0 = \rho c_p \overline{w'T'} = \rho c_p u_* \Theta_* \quad , \quad V_0 = \rho L_{wd} \overline{w'q'_d} = \rho L_{wd} u_* q_*$$

und V_0/H_0 das inverse Bowen–Verhältnis. Kürzen führt auf

$$L_* = \frac{u_*^2 \Theta_\rho}{\kappa g \Theta_* \left[1 + \left(\frac{R_d}{R_l} - 1 \right) q_d \right] + \kappa g q_* \left(\frac{R_d}{R_l} - 1 \right) \Theta} = \frac{u_*^2 \Theta_\rho}{\kappa g [\Theta_* (1 + a) + q_* b]} . \quad (4.22)$$

Die weitere Berechnung von $\zeta = z/L_*$, u_* etc. verläuft analog zu dem von Dotzek und Emeis (1996) dargestellten Rechenweg für den Fall ohne Feuchteeinfluß:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa(z-d)} \phi_m \quad \rightarrow \quad u_* = \frac{\kappa [u(z) - u(z_0 + d)]}{\ln \frac{z-d}{z_0} - \Psi_m|_{z_0}^{z-d}} \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\Theta_*}{\kappa(z-d)} \phi_h \quad \rightarrow \quad \Theta_* = \frac{\kappa [\Theta(z) - \Theta(z_{0\Theta} + d)]}{\frac{K_m}{K_h} \ln \frac{z-d}{z_{0\Theta}} - \Psi_h|_{z_{0\Theta}}^{z-d}} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial q_d}{\partial z} = \frac{q_*}{\kappa(z-d)} \phi_q \quad \rightarrow \quad q_* = \frac{\kappa [q_d(z) - q_d(z_{0q} + d)]}{\frac{K_m}{K_q} \ln \frac{z-d}{z_{0q}} - \Psi_q|_{z_{0q}}^{z-d}} . \quad (4.25)$$

Dabei bezeichnen die Größen z_0 , $z_{0\Theta}$ und z_{0q} die Rauigkeitslängen der Profile von v , Θ und q_d . Die Variable d ist die Verdrängungshöhe, K_m/K_h und K_m/K_q sind turbulente Prandtlzahlen in den Gleichungen für Θ_* und q_* . Das Integrationsgebiet der Profile erstreckt sich in der Vertikalen von z_0 , $z_{0\Theta}$ bis zur Höhe z .

Für die Werte im Niveau $z_0 + d$ gilt für die Nomenklatur aus Lenz (1996)

$$u(z_0 + d) = u_{af} \approx u_* C_{veg} \quad , \quad \Theta(z_{0\Theta} + d) = \Theta_{af} \quad , \quad q_d(z_{0q} + d) = q_{af} \quad ,$$

so daß mit der Umformung

$$u_* = \frac{\kappa u(z)}{\ln \frac{z-d}{z_0} - \Psi_m|_{z_0}^{z-d} + \kappa C_{veg}} \quad (4.26)$$

nach ζ aufgelöst werden kann:

$$\zeta = \frac{z-d}{L_*} = Rib_{,1} \frac{\left(\ln \frac{z-d}{z_0} - \Psi_m|_{z_0}^{z-d} + \kappa C_{veg} \right)^2}{\frac{K_m}{K_h} \ln \frac{z-d}{z_{0\Theta}} - \Psi_h|_{z_{0\Theta}}^{z-d}} + Rib_{,2} \frac{\left(\ln \frac{z-d}{z_0} - \Psi_m|_{z_0}^{z-d} + \kappa C_{veg} \right)^2}{\frac{K_m}{K_q} \ln \frac{z-d}{z_{0q}} - \Psi_q|_{z_{0q}}^{z-d}} \quad . \quad (4.27)$$

Die Richardsonzahlen $Rib_{,1}$ und $Rib_{,2}$ stellen die diskrete Form von Gradient–Richardsonzahlen dar und lauten

$$Rib_{,1} = \frac{g(z-d)(\Theta(z) - \Theta_{af})}{u^2(z)\Theta_\rho(z)} (1+a) \quad , \quad Rib_{,2} = \frac{g(z-d)(q_d(z) - q_{af})}{u^2(z)\Theta_\rho(z)} b \quad . \quad (4.28)$$

Eine wertvolle Vereinfachung erhält man für

$$\frac{K_m}{K_q} \equiv \frac{K_m}{K_h} \quad , \quad z_{0q} \equiv z_{0\Theta} \quad , \quad \Psi_q \equiv \Psi_h \quad .$$

Dann ergibt sich nämlich

$$\zeta = \frac{z-d}{L_*} = [Rib_{,1} + Rib_{,2}] \frac{\left(\ln \frac{z-d}{z_0} - \Psi_m|_{z_0}^{z-d} + \kappa C_{veg} \right)^2}{\frac{K_m}{K_h} \ln \frac{z-d}{z_{0\Theta}} - \Psi_h|_{z_{0\Theta}}^{z-d}} \quad (4.29)$$

und kann gemäß $L_* = (z-d)/\zeta$ zur Berechnung der Monin–Obuchow Länge herangezogen werden. Mit den Beziehungen für die Profildfunktionen und den Gln. (4.23–4.25) liegen dann auch die Werte der Profilparameter u_* , Θ_* und q_* vor.

Der konvektive Fall

Bei der Berechnung konvektiver Vorgänge in der Atmosphäre ist neben der Berücksichtigung der spezifischen Feuchte q_d bei der Ermittlung der Monin–Obuchow Länge vor allem ein Problem zu lösen: die Spezifikation des vertikalen Impulsflusses auch dann, wenn der mittlere Horizontalwind \bar{v}_h nahezu verschwindet und stattdessen durch zufällig wechselnde Windböen ersetzt wird, die von der Konvektion direkt angetrieben werden. Starke bodennahe Vertikalwinde ziehen aufgrund der Massenerhaltung diese scheinbar zufälligen horizontalen Ausgleichsbewegungen nach sich, die sich im raum–zeitlichen Mittel aber nahezu aufheben. Dennoch bewirken sie den größten Teil des vertikalen Impulsaustauschs. Die räumliche Struktur dieser Grenzschichtphänomene (Kropfli, 1979) wurde bereits anhand eines Laborsystems mithilfe der direkten numerischen Simulation studiert und von Dotzek (1993) ausführlich dokumentiert.

Für den Fall der atmosphärischen Grenzschicht löst man das Problem durch Einführung einer konvektiven Böengeschwindigkeit u_g (Sui et al., 1997)

$$u_g \approx 1.25 w_* \quad ,$$

die als zusätzliche Komponente zum Horizontalwind in der Grenzschicht addiert wird und begegnet damit der rapiden Abnahme des mittleren Windes bei starker Konvektion, denn gerade in diesem Fall wird die konvektive Geschwindigkeitsskala w_* sehr groß. Auch Redelsperger (1996, pers. Mitteilung) verwendet im Zusammenhang mit Simulationen zum TOGA–COARE Programm³ eine analoge Beziehung, allerdings mit einer ca. um einen Faktor 2 kleineren Proportionalitäts–Konstante.

Um die Geschwindigkeitsskala w_* der Konvektion

$$w_* = \sqrt[3]{-\frac{z_i}{\kappa L_*} u_*} = \sqrt[3]{-\frac{gz_i}{\Theta_\rho} u_* \Theta_{v*}} \quad (4.30)$$

berechnen zu können, benötigt man neben den bereits vorliegenden Größen u_* und L_* noch die Grenzschichthöhe z_i . Diese wird ähnlich wie in früheren Versionen des KAMM–Modells mittels eines hybriden diagnostisch–prognostischen Verfahrens bestimmt (Lenz, 1996).

4.1.11 Wolkenmodell

Das Wolkenmodell vom Kessler–Typ dient der Berechnung der bisher noch nicht spezifizierten Terme in der Wärmegl. (4.14), der Feuchtegl. (4.15) und den Hydrometeorgl. (4.16–4.18). Die entsprechenden Teile der Gleichungen sind

$$\begin{aligned} d_t \bar{\Theta} &= \frac{1}{\bar{\rho} c_p \Pi_0} [\underbrace{L_{wd} Nu_c}_1 + \underbrace{L_{ed} Nu_i}_3 - \underbrace{L_{wd} Ev}_2 + \underbrace{L_{we} Fr}_3] \\ d_t \bar{q}_d &= + \frac{1}{\bar{\rho}} [- \underbrace{Nu_c}_1 - \underbrace{Nu_i}_3 + \underbrace{Ev}_2] \\ \partial_t \bar{q}_c + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} [\bar{\mathbf{v}} + \underbrace{w_c \mathbf{e}_z}_1] \bar{q}_c) &= + \frac{1}{\bar{\rho}} [+ \underbrace{Nu_c}_1 - \underbrace{Fr}_3] \underbrace{- Au - Ak + Br}_2 \\ \partial_t \bar{q}_r + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} [\bar{\mathbf{v}} + \underbrace{w_r \mathbf{e}_z}_{2,3}] \bar{q}_r) &= \underbrace{- \frac{1}{\bar{\rho}} Ev + Au + Ak - Br}_2 \\ \partial_t \bar{q}_i + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} [\bar{\mathbf{v}} + \underbrace{w_i \mathbf{e}_z}_3] \bar{q}_i) &= + \frac{1}{\bar{\rho}} [+ \underbrace{Nu_i}_3 + \underbrace{Fr}_3] \quad . \end{aligned}$$

Dabei kann das Wolkenmodell vom Anwender in vier unterschiedlichen Modi betrieben werden:

1 Die Basisversion, die sich bereits im neu entwickelten kompressiblen Modell KAMM2 (Förstner, 1998) bewährt hat, ist ein Modell zur Beschreibung nichtregender warmer Wolken. Dafür werden

³Tropical Ocean–Global Atmosphere — Coupled Ocean–Atmosphere Response Experiment.

alle in den obigen Gleichungen mit 1 unterklammerten Terme berücksichtigt. Niederschlagsprozesse werden zwar ausgeschlossen, aber die Bildung und Verteilung orogener Schönwetterwolken kann bereits komplett erfaßt werden.

- 2 Zusätzlich zur Basisversion werden die mit einer 2 gekennzeichneten Terme hinzugefügt. Man erhält das typische Wolkenmodell konvektiver, eisfreier Wolken nach dem Vorschlag von Kessler (1969). Die Wolken können hier nicht vereisen, und auch der Niederschlag besteht aus flüssigen Regentropfen. Dies entspricht den Simulationen von Klemp und Wilhelmson (1978).
- 3 Zusätzlich zur Basisversion 1 werden die nur mit einer 3 markierten Eisphasenterme Nu_i und Fr mitberechnet. Dabei sind zwar Niederschläge nicht möglich, die Wolken können aber jetzt vereisen. Dies ist für flache Konvektion unter winterlichen Bedingungen von Bedeutung, aber auch für hochreichende, nichtregnende Cu cong (Carpenter und Droegemeier, 1998a,b,c).
- 4 Zusätzlich zur schon beschriebenen Version 2 werden jetzt auch alle mit 3 markierten Terme der Eisphase berücksichtigt. Dies betrifft die gemeinsame Bildung von Wolkentröpfchen und Eiskristallen (Mischnukleation), das Gefrieren allen Wolkenwassers für $T < T_f \simeq -40$ °C und eine dem Schnee/Mischniederschlag entsprechende Reduktion der Fallgeschwindigkeit des Niederschlags oberhalb der 0 °C–Grenze. Diese Konfiguration stellt zudem den aktuellen Stand für das kompressible Modell KAMM2 dar.

Die noch ausstehenden Terme der Gln. (4.14–4.18) werden nachfolgend in der Reihenfolge Wolkenprozesse, Niederschlagsprozesse, Sedimentation besprochen, danach die im Wolkenmodell und an mehreren anderen Stellen des Modells auftauchenden Beziehungen für die Sättigungsdampfdrücke über Eis und Wasser nach Tetens (1930), Murray (1967) und Bolton (1980).

Wolkenprozesse

Unter den Wolkenprozessen werden alle jene Prozesse innerhalb der Wolke geführt, bei denen nicht unmittelbar eine zeitliche Tendenz der Niederschlagsvariablen q_r hervorgerufen wird. Sie betreffen bei der jetzigen Version des Wolkenmodells die Umwandlungen zwischen Wolkenwasser und Wolkeneis durch Gefrieren/Schmelzen sowie die Neubildung oder Nukleation der Wolkenteilchen aus der Dampfphase.

Gefrieren und Schmelzen: Fr :

Mit diesem Prozeß wird zusammen mit der nachfolgenden Sättigungsadjustierung für Mischwolken ein bei hochreichenden konvektiven Wolken wichtiger Vorgang modelliert — das nahezu komplette Vereisen der Wolke, nachdem der Schauer / das Gewitter niedergegangen sind und die Wolke anfängt, sich aufgrund fehlenden Nachschubs feucht-warmer Luft aufzulösen.

Oberhalb des Tripelpunkts, d. h. $T > T_3$ schmelzen dabei alle Wolkeneiskristalle instantan, unterhalb von $T_f \simeq -40$ °C gefriert spontan alles noch vorhandene (unterkühlte) Wolkenwasser. Im Bereich zwischen diesen beiden Extremen wird der Vereisungsprozeß von der Sättigungsadjustierung bewerkstelligt. So bleibt demnach nur für Fr mit dem Zeitschritt des Wolkenmodells Δt_c :

$$\partial_t q_c = -\frac{q_c}{\Delta t_c} \quad , \quad \partial_t q_i = +\frac{q_c}{\Delta t_c} \quad \text{für } T \lesssim -40 \text{ °C} \quad (4.31)$$

$$\partial_t q_c = +\frac{q_i}{\Delta t_c} \quad , \quad \partial_t q_i = -\frac{q_i}{\Delta t_c} \quad \text{für } T > 0 \text{ °C} \quad . \quad (4.32)$$

Wasserwolken–Nukleation: Nu_c :

Die Nukleation von Wolkentröpfchen wird in Parametrisierungen der Wolkenmikrophysik nach dem Vorbild des Kessler–Schemas normalerweise durch eine Sättigungsadjustierung bestimmt. Diese sorgt dafür, daß jegliche Wasserdampf–Übersättigung instantan soweit abgebaut wird, daß genau $RH = 100 \%$ relative Luftfeuchte erhalten bleiben. Man macht dabei folgende vereinfachende Annahmen:

- die Kondensation tritt sofort bei $RH = 100 \%$ ein, obwohl in der Atmosphäre auch leichte Übersättigungen von einigen Prozent beobachtet werden, bevor sich Wolken bilden (Doms und Herbert, 1985; Emanuel, 1994; Pruppacher und Klett, 1997),
- die Phasenumwandlung wird als vollkommen reversibel angenommen, d. h. auch bei beliebig oft wiederholtem Bilden und Auflösen der Wolken entsteht und vergeht immer dieselbe Menge Wolkenwasser q_c .

Die Schwierigkeit bei diesem Verfahren liegt darin, daß bei der Kondensation der Tropfen Wärme frei wird, die die relative Feuchte wieder in den Bereich der Untersättigung zurückführen kann, so daß in einem zweiten Schritt etwas Flüssigwasser verdunstet werden müßte, was aber die Luft wieder abkühlt und die relative Feuchte wieder über 100% treiben könnte, usf.. Dieser durch die Wärme des Phasenübergangs bedingte iterative Prozeß müßte nach Erreichen der gewünschten Genauigkeit bei der Berechnung des Sättigungsgleichgewichts abgebrochen werden.

Da aber in der Wolke auch kleinste Abweichungen von der Sättigung vorgefunden werden, ist es ökonomischer, statt der Iteration die z. B. bei Doms und Herbert (1985) oder Xue et al. (1995) dargestellte Näherungslösung zu verwenden, die das Sättigungsgleichgewicht in einem einzigen direkten Schritt ermittelt. Eine Überprüfung innerhalb des fertiggestellten Wolkenmodells ergab, daß die Sättigung damit in der Tat sehr gut angenähert wird. Die relative Feuchte liegt zumindest im Intervall

$$99.85 \% \leq RH \leq 100.15 \%$$

und rechtfertigt somit die Anwendung des im folgenden dargestellten Approximationsverfahrens, das sogar für hochreichende, nichtregnende Cu cong–Bewölkung mit Gewinn angewandt wird (Carpenter und Droegemeier, 1998a,b,c).

Die Sättigungsadjustierung stellt immer den letzten Schritt im Wolkenmodell dar, alle anderen Prozesse werden vorher berücksichtigt. Ausgehend von Druck p und Temperatur T im Wolkenraum sowie den Sättigungsdampfdruckkurven $e_{ws}(T)$ für Wasser und $e_{is}(T)$ für Eis nach Tetens (1930) in den Gln. (4.57)⁴ mit ihren Koeffizienten wird zunächst die Sättigungsfeuchte q_{ds} bestimmt:

$$q_{ds} = \frac{R_L}{R_D} \frac{e_{ws}}{p + \left(\frac{R_L}{R_D} - 1 \right) e_{ws}} \quad , \quad (4.33)$$

bevor die eigentlichen Terme zur Ermittlung der Menge Δq_d des Phasenübergangs bestimmt werden (Doms und Herbert, 1985):

$$\begin{aligned} a &= A_w (T_3 - B_w) \Pi_0 (T - B_w)^{-2} \\ b &= a q_{ds} L_{wd}(T) (c_p \Pi_0)^{-1} \quad . \end{aligned}$$

⁴Andere Formulierungen der Sättigungsdampfdrücke, z. B. die aus der Integration der Clausius–Clapeyron Gleichung folgende Magnusformel, führen zu Modifikationen der Terme des Adjustierungsverfahrens (vgl. Doms und Herbert, 1985).

Damit folgt dann in zwei Schritten Δq_d :

$$\begin{aligned}\Delta q_d^* &= -(q_d - q_{ds}) (1 + b)^{-1} \\ \Delta q_d &= \min(\Delta q_d^*, q_c) \quad ,\end{aligned}$$

wobei die zweite Beziehung dafür sorgt, daß im Fall einer Untersättigung nicht mehr als das vorhandene Wolkenwasser verdunsten kann.

Die aktualisierten Werte von q_d , q_c und Θ ergeben sich damit als

$$\Theta_{\text{adj}} = \Theta - L_{wd}(T)(c_p \Pi_0)^{-1} \Delta q_d \quad (4.34)$$

$$q_{d,\text{adj}} = q_d + \Delta q_d \quad (4.35)$$

$$q_{c,\text{adj}} = q_c - \Delta q_d \quad . \quad (4.36)$$

Diese Adjustierung deckt folgende Fälle realistisch ab:

- Im Fall von Übersättigung entsteht soviel Wolkenwasser, bis wieder genau das Sättigungsgleichgewicht herrscht.
- Im Fall von Untersättigung verdunstet soviel Wolkenwasser, bis entweder Sättigungsgleichgewicht herrscht oder das Wolkenwasser verbraucht ist, d. h. die Wolke sich auflöst.
- Die Sättigungsadjustierung allein dient als einfachstes Wolkenmodell für nichtregnende Wolken (Houze, 1993). In dieser Form wurde sie schon frühzeitig für das neue KAMM2-Modell bereitgestellt.

Für die Beschreibung von Mischwolken reicht dieses Verfahren jedoch nicht aus, weil ansonsten nur durch den Term Fr unterhalb von T_f Wolkeneis gebildet würde. Im Temperaturbereich zwischen $T_f \simeq -40$ °C und dem Tripelpunkt $T_3 \simeq 0.01$ °C träte dann keine Vereisung der Wolken nach Durchlaufen ihres Reifestadiums auf. Daher wurde die vorgestellte Sättigungsadjustierung für Wasserwolken im Rahmen dieser Arbeit auf Mischwolken verallgemeinert.

Mischwolken-Nukleation: Nu_c , Nu_i :

Die gemeinsame Nukleation von Wolkentröpfchen und Wolkeneiskristallen ist physikalisch komplex und wurde mithilfe eines Adjustierungsverfahrens bisher nur von Tao et al. (1989) angegangen. Deren Verfahren hat jedoch zwei Nachteile:

1. Bei der Erstbildung einer Mischwolke können zunächst nur Tröpfchen entstehen, nicht Kristalle und Tropfen gemeinsam.
2. Weil ein massengewichtetes mittleres Sättigungsmischungsverhältnis postuliert wird, kann nach der „Adjustierung“ noch eine Übersättigung bezüglich Eis im Wolkenraum bestehen bleiben.

Deshalb wurde für die vorliegende Dissertation ein Algorithmus wickelt, der diese Probleme vermeidet und physikalisch plausibel abläuft.

Die Schwierigkeit bei der theoretischen Beschreibung der Nukleation in Mischwolken rührt von der Tatsache her, daß die Sättigungsdampfdrücke über Eis und Wasser unterschiedlich sind; ihre größte Differenz liegt bei ca. -12 °C. Weil bis zu Temperaturen unterhalb $T_f \simeq -40$ °C noch nennenswerte Mengen

unterkühlter Tropfen in der Wolke vorhanden sein können, befindet sich jede Mischwolke im Intervall $T_f \lesssim T < T_3$ in einem thermodynamischen Nichtgleichgewichtszustand. In diesem Intervall verbietet sich also genaugenommen die Anwendung einer Sättigungsadjustierung, denn diese setzt ja die Existenz eines Gleichgewichtszustands aus Wolken–Hydrometeoren und Wasserdampf voraus. Eindeutig ist das System nur für $T \leq T_f$, wo nur Eiskristalle und $T \geq T_3$, wo nur Wassertropfen gebildet werden. Diese beiden Fälle werden durch den schon vorgestellten Algorithmus beschrieben; für $T < T_f$ sind lediglich die Werte der Funktion e_{is} statt e_{ws} zu verwenden und die Schmelzwärme L_{iw} mit zu berücksichtigen. Für $T \geq T_3$ ergibt sich die schon beschriebene Wasserwolken–Nukleation.

Der Rest dieses Abschnitts widmet sich daher der Physik des Falles $T_f < T < T_3$ und dem Ansatz, ihn trotz des Nichtgleichgewichts der Phasen durch eine Sättigungsadjustierung zu beschreiben. Der diesem Verfahren zugrunde liegende physikalische Sachverhalt, der auch die Erklärung des in der Meteorologie unter dem Begriff Wegener–Bergeron–Findeisen Prozeß bekannten Phänomens der fortschreitenden Vereisung unterkühlter Wolken darstellt, ist in Abb. 4.2 prinzipiell illustriert. Dort sind in einem schematischen T, e –Diagramm die Sättigungsdampfdrücke e_{ws} und e_{is} aufgetragen, ihr Schnittpunkt hat die Koordinaten (T_3, E_0) . Die Zustände a–d symbolisieren hier mögliche Realisierungen des thermodynamischen Systems „Wolke“ unterhalb der 0 °C–Grenze. Zur Erklärung des Wegener–Bergeron–Findeisen

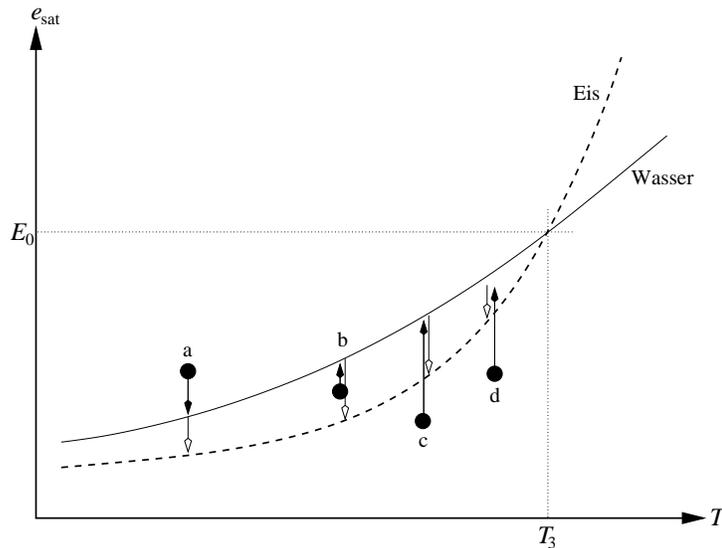


Abbildung 4.2: Schema der Alternativen der Nukleation in Mischwolken anhand der Dampfdruckkurven $e_{\text{sat}}(T)$ von Eis und Wasser, die sich im Tripelpunkt T_3 schneiden.

Prozesses dienen am besten die Zustände a und b. Dort ist die Luft entweder bezüglich Wasser über- oder untersättigt, bezüglich Eis aber in beiden Fällen übersättigt. Solange keine Eisteilchen vorhanden sind, gilt auch für die unterkühlten Wassertropfchen die Sättigungsadjustierung für Wasserwolken, und nur e_{ws} ist von Bedeutung. Sobald aber Eisteilchen z. B. durch das schon beschriebene spontane Gefrieren bei $T < T_f$ entstanden sind, kommt der erniedrigte Sättigungsdampfdruck über Eis zum Tragen. Im Zustand a würde nun auch Eis gebildet, im Zustand b würde zunächst Wolkenwasser verdunsten, um Wassersättigung zu erreichen, gleichzeitig liegt aber Eisübersättigung vor, die zum Wachstum von Eiskristallen führt. Solange noch Eis und Flüssigwasser vorhanden sind, besteht also ein stetiger Wasserdampfstrom von den unterkühlten Wolkentröpfchen zu den Eisteilchen, die deshalb in bezug auf ihre Größe sehr schnell anwachsen (Pruppacher und Klett, 1997). Durch diesen Wegener–Bergeron–Findeisen- und den Eissplitter Prozeß (*ice splintering*), bei dem zusätzlich die Anzahl kleiner Eiskristalle erhöht wird, ist es konzeptionell zu erklären, wie hochreichende Cu–Wolken binnen ca. 10 min fast vollkommen vereisen können, sobald sich in der reifen Wolke erst einmal eine Anfangspopulation von Eiskristallen gebildet hat. Näheres hierzu findet man z. B. in den Arbeiten von Cotton und Anthes (1989), Houze (1993), Emanuel (1994) sowie Pruppacher und Klett (1997).

Die Aufgabe der Sättigungsadjustierung für Mischwolken ist es, diesen Prozeß zu beschreiben und die Nachteile der Adjustierung nach Tao et al. (1989) zu umgehen, insbesondere die möglichen Eis–Übersättigungen zum Ende des Verfahrens. Zu diesem Zweck wurde ein neuer Algorithmus als ein Zweischrittverfahren entwickelt, für dessen Erläuterung wiederum Abb. 4.2 dient.

Das neue Verfahren teilt sich in folgende Abschnitte auf:

1. Falls $T > T_f \simeq -40 \text{ }^\circ\text{C}$ gilt, wird eine Adjustierung bezüglich Wasser durchgeführt, so wie bereits beschrieben und in Abb. 4.2 durch die ausgefüllten Pfeile dargestellt. Am Ende dieses Teilschritts werden q_d , q_c und Θ gemäß der Beziehungen (4.34–4.36) und die absolute Temperatur mittels $T = \Theta \Pi_0$ aktualisiert.
2. Falls $T < T_3$ gilt, schließt sich der zweite Schritt an, nämlich die Sättigungsadjustierung bezüglich Eis. Liegt in dieser Situation Eisuntersättigung vor⁵, dann sublimiert das vorhandene Wolkeneis, bis Eissättigung erreicht oder die Eiswolke verschwunden ist. Liegt aber Wassersättigung (Fälle a–c) vor bzw. zumindest eine Eisübersättigung (Fall d), dann werden bei der Adjustierung bezüglich Eis entlang der offenen Pfeile in Abhängigkeit von der absoluten Temperatur T Wasser und Eis gemeinsam gebildet.

Abhängig vom Wasserdampfüberschuß im zweiten Schritt erfolgt die Aufteilung bezüglich der Menge des gebildeten Eises bzw. Wassers analog zum Verfahren nach Tao et al. (1989) durch eine bilineare Wichtung mit der Temperatur im Intervall $T_f \leq T \leq T_3$. Liegt die Menge Δq_d als Übersättigung vor, und bezeichnet

$$\alpha = \frac{T - T_f}{T_3 - T_f}$$

das temperaturabhängige Wichtungsverhältnis Wasser/Eis, dann gilt

$$\begin{aligned} q_{d,\text{adj}} &= q_d - \Delta q_d \\ q_{c,\text{adj}} &= q_c + \alpha \Delta q_d = q_c + \Delta q_c \\ q_{i,\text{adj}} &= q_i + (1 - \alpha) \Delta q_d = q_i + \Delta q_i \quad . \end{aligned}$$

Konsistent dazu wird auch zwischen Verdunstungs- und Sublimationswärme, d. h. $L_{wd}(T)$ und $L_{id}(T)$ gewichtet, so daß gilt:

$$\begin{aligned} L_{\alpha d} &= L_{wd}(T) \alpha + L_{id}(T) (1 - \alpha) \quad , \\ \Theta_{\text{adj}} &= \Theta + (c_p \Pi_0)^{-1} L_{\alpha d} \Delta q_d \\ &= \Theta + (c_p \Pi_0)^{-1} [L_{wd} \Delta q_c + L_{id} \Delta q_i] \quad . \end{aligned}$$

Damit ist eine mit abnehmender Temperatur anwachsende Bevorzugung der Eisnukleation Nu_i gegenüber Nu_c gesichert, was auch von Tao et al. (1989) als wichtige Eigenschaft hervorgehoben wird. Zudem bleiben keine Rest-Übersättigungen, und auch bei einer spontanen Wolkenbildung oberhalb der $0 \text{ }^\circ\text{C}$ -Grenze werden sofort simultan Tröpfchen und Kristalle gebildet.

Niederschlagsprozesse

Unter den Niederschlagsprozessen werden jene Vorgänge zusammengefaßt, die direkten Einfluß auf den Regenwassergehalt der Wolke haben. Dazu gehören die Autokonversion, also die Bildung von Regentropfen aus Wolkentröpfchen durch Zusammenfließen und die Akkreszenz, d. h. die Anlagerung kleiner Wolkentröpfchen an schon vorhandene Regentropfen. Autokonversion und Akkreszenz werden häufig unter dem Begriff Koagulation zusammengefaßt. Als abbauende Prozesse wirken die Evaporation, d. h.

⁵Flüssigwasser kann in diesem Fall nicht mehr im System sein.

Verdampfung von Regentropfen in untersättigter Luft und das Instabilwerden und Zerplatzen sich vereiniger bzw. sehr großer Regentropfen mit $D \gtrsim 6\text{--}10$ mm. Eine direkte Berechnung gefrorener Niederschlagsteilchen, wie sie z. B. von Höller (1986) vorgestellt wird, ist in KAMM im Rahmen dieser Arbeit nicht vorhanden. Lediglich über die im nächsten Abschnitt besprochene Sedimentation des Niederschlags kommt die Eisphase indirekt hinzu.

Autokonversion Au:

Die Entstehung primärer Regentropfen durch Autokonversion wird aufgrund der Kompliziertheit dieses Prozesses (Doms und Herbert, 1985; Beheng und Doms, 1986, 1990; Lüpkes, 1991; Beheng, 1994; Pruppacher und Klett, 1997) im KAMM-Modell mit dem einfachen und intuitiven Ansatz von Kessler (1969) modelliert. Ihm liegt zugrunde, daß erst in Wolken mit einem bestimmten Wolkenwassergehalt $C_{\rho q}$ auch Regenwasser q_r beobachtet wird. Diese Grenze wird normalerweise bei $\rho q_c = 0.5 \text{ g m}^{-3}$ gezogen.

Es ergeben sich dann dennoch drei mögliche Varianten:

$$\partial_t q_r = C_{Au} \frac{1}{\rho} \max(\rho q_c - C_{\rho q}, 0) \quad (4.37)$$

$$\partial_t q_r = C_{Au} \max(q_c - C_{\rho q} \rho^{-1}, 0) \quad (4.38)$$

$$\partial_t q_r = C_{Au} \max(q_c - C_{q_c}, 0) \quad (4.39)$$

Die Gln. (4.37–4.38) gehen auf Kessler (1969) zurück, während Gl. (4.39) die seit Klemp und Wilhelmson (1978) für konvektive Wolkensimulationen vorwiegend benutzte Form ist. Der am häufigsten verwendete Wert der Zeitkonstanten ist $C_{Au} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Für die Schwellwerte, unterhalb derer kein Wolkenwasser mehr in Regen umgewandelt wird, gilt dagegen

$$C_{\rho q} = 0.5 \text{ g m}^{-3} \quad , \quad C_{q_c} = 1.0 \times 10^{-3} \quad .$$

Dabei hat die Klemp–Wilhelmson Variante (4.39) die Eigenschaft, noch Regenwasser zu erzeugen, wenn die Wolkenwasserdichte ρq_c schon sehr klein ist, z. B. in großen Höhen. Umgekehrt ermöglicht die kleinere Schwelle $C_{\rho q}$ in (4.37) und (4.38) für Grenzschichtwolken in $z \lesssim 1$ km Höhe schon Regenbildung bei sehr kleinen Wolkenwassergehalten q_c . Dies ist z. B. bei der Regenbildung in flachen Cumuli über der maritimen Grenzschicht bei polaren Kaltluftausbrüchen von Bedeutung (Lüpkes, 1998, pers. Mitteilung). Weil aber das Hauptaugenmerk auf der Berechnung hochreichender Cumulus–Konvektion liegt, wird in der vorliegenden Arbeit der Gl. (4.39) der Vorzug gegeben.

Akkreszenz Ak:

Die Anlagerung von Wolkenröpfchen an Regentropfen wird nach den Annahmen parametrisiert, daß die Regentropfen durch eine ruhende, homogene Population von Wolkenröpfchen fallen und diese dabei nicht komplett verdrängen, sondern mit maximaler Effizienz einfangen und sich mit ihnen vereinigen (kontinuierliches Modell).

Es ergeben sich mit der Zeitkonstanten $C_{Ak} = 2.216 \text{ s}^{-1}$ aus Klemp und Wilhelmson (1978) bzw. Xue et al. (1995) die folgenden zwei Varianten

$$\partial_t q_r = C_{Ak} \left(\frac{\rho_{00}}{\rho} \right)^{0.4} q_c (\rho q_r)^{7/8} \quad (4.40)$$

$$\partial_t q_r = C_{Ak} \left(\frac{\rho_{00}}{\rho} \right)^{0.4} q_c q_r^{7/8} \quad , \quad (4.41)$$

wobei der Faktor mit dem Exponent 0.4 das schnellere Fallen der Regentropfen bei geringerer Luftdichte berücksichtigt (Foote und du Toit, 1969).

Verdunstung (Evaporation) Ev:

Regentropfen können auf ihrem Weg von der Wolkenbasis zum Erdboden teilweise oder auch völlig verdunsten, wobei die Luftmasse, in der diese Verdampfung stattfindet, durch den Phasenübergang deutlich gekühlt wird und ganz entscheidend zur Ausbildung konvektiver Wolkenabwinde und Böenfronten beiträgt.

Es ergibt sich dann (Ogura und Takahashi, 1971; Klemp und Wilhelmson, 1978; Doms und Herbert, 1985; Xue et al., 1995)

$$\partial_t q_r = -\frac{1}{\rho} a_1 (\rho q_r)^{0.525} f_v S \quad (4.42)$$

$$\partial_t q_r = -\frac{1}{\rho} a_1 \sqrt{\rho q_r} f_v S \quad (4.43)$$

Der Exponent 0.525 aus der Arbeit von Ogura und Takahashi (1971) ist nicht nachvollziehbar, wird in der Literatur aber treu tradiert; nur die Wurzel in Gl. (4.43) hat theoretische Berechtigung (vgl. Doms und Herbert, 1985).

In den Gln. (4.42) und (4.43) bezeichnen die Faktoren

$$a_1 = \left[2.030 \times 10^4 + \frac{1.541 \times 10^7}{\min(e_{ws}, e_{is})} \right]^{-1} \quad (4.44)$$

$$f_v = 1.6 + 30.3922 \left(\frac{\rho_{00}}{\rho} \right)^{0.2} (\rho q_r)^{0.2046} \quad (4.45)$$

$$\text{a) } S = 1 - \frac{q_d}{q_{ds}} \quad \text{oder} \quad \text{b) } S = \max \left(1 - \frac{q_d}{q_{ds}}, 0 \right) \quad (4.46)$$

Dabei stellt a_1 einen Phasenübergangs-Koeffizienten und f_v den Ventilationsfaktor dar, der proportional zur Quadratwurzel aus der Tropfen-Reynoldszahl Re_D ist und daher auch die Höhenabhängigkeit der Luftdichte mit dem Exponenten 0.2 anstatt 0.4 berücksichtigt. Wird der Sättigungsüberschuß S mit der max-Funktion in Gl. (4.46 b) limitiert, können die Tropfen lediglich verdunsten, wird dagegen S wie in (4.46 a) direkt verwendet, können Regentropfen in übersättigter Luft auch noch wachsen.

Zerfall (Breakup) Br:

Ein weiterer, in vielen Wolkenmodellen mit parametrisierter Mikrophysik vernachlässigter Prozeß ist der Tropfenzerfall. Wie von Dorwarth (1979) zusammengefaßt wird, ist ein solcher Zerfall in zwei Situationen wahrscheinlich:

1. Stochastisches Zerplatzen sehr großer Tropfen ($D \gtrsim 6-10$ mm). Hier wirkt die aerodynamisch erzeugte interne Zirkulation im fallenden Tropfen über Fliehkräfte der Oberflächenspannung entgegen und führt schließlich zur Selbstzerstörung. Bei diesem Vorgang entstehen viele kleine Tropfen mit einem spektralen Maximum unterhalb der Grenze zu den Wolkentropfen ($D \approx 100 \mu\text{m}$) und bedingen einen spektralen Fluß vom Regen- zum Wolkenwasser.
2. Kollisionsaufbrechen nach der Koaleszenz zweier Tropfen. Hier kann die Energie des Zusammenpralls den neugebildeten Tropfen wieder in unterschiedlich große Einzeltröpfchen zerfallen lassen. Oft bleiben dabei ein großer und eine geringere Anzahl kleinerer Tropfen mit Durchmessern knapp oberhalb $D \approx 100 \mu\text{m}$ zurück. Es kann also nicht generell von einem Transfer von Regen- zu Wolkenwasser ausgegangen werden.

Setzt man voraus, daß die beiden Zerfallsprozesse erst in sehr starkem Regen wirksam werden, dann gelangt man zu einem Ansatz, der nur den Regenwassergehalt q_r als Eingabegröße benötigt. Dabei wird das kontinuierliche Aufbrechen der Regentropfen als stetiger Massenstrom in den q_c -Bereich des Tropfenspektrums parametrisiert. Mit der Vorgabe eines Mindest-Regenwassergehalts für die Initiierung dieses Prozesses gelangt man zwanglos zu einer Beschreibung analog der Autokonversionsrate Au .

Die Grenze, oberhalb derer das Zerplatzen der Tropfen beginnt, folgt aus der Forderung, daß der Volumendiamedurchmesser \tilde{D}_V des Regentropfenspektrums eine Schwelle von $\tilde{D}_{Vc} = 2.5$ mm überschreiten soll. Mit den Gln. (B.10) und (B.16) sowie Tab. B.1 ergibt

$$\tilde{D}_V \simeq (2.67 + \gamma) D_0 = (2.67 + \gamma) \left[\frac{6}{\pi \rho_w \Gamma(\gamma + 3)} \right]^{1/4} N_0^{-1/4} \rho q^{1/4} ,$$

so daß $\tilde{D}_V > \tilde{D}_{Vc}$ bedeutet:

$$\rho q_r > C_{\rho q} = \frac{\pi}{6} \rho_w \frac{\Gamma(\gamma + 3)}{(2.67 + \gamma)^4} N_{0r} \tilde{D}_{Vc}^4 .$$

Nach Tab. B.1 folgt für Marshall-Palmer Spektren ($\gamma = 1$) ein Schwellwert $C_{\rho q} \simeq 8 \text{ g m}^{-3}$, und für $\gamma = 2$ (Ulbrich, 1994) ist $C_{\rho q} \simeq 12 \text{ g m}^{-3}$. Daher wird in KAMM die Schwelle bei $C_{\rho q} = 10 \text{ g m}^{-3}$ bzw. $C_{q_r} = 1.0 \times 10^{-2}$ festgeschrieben. Dieser Wert wird in stark konvektiven Wolken durchaus erreicht, ist aber nicht sehr häufig. Es ergeben sich damit zwei Varianten der Parametrisierung bei Annahme einer Zeitkonstanten $C_{Br} = 1.0 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$:

$$\partial_t q_r = -C_{Br} \frac{1}{\rho} \max(\rho q_r - C_{\rho q}, 0) \quad (4.47)$$

$$\partial_t q_r = -C_{Br} \max(q_r - C_{q_r}, 0) . \quad (4.48)$$

Sedimentation der Hydrometeore

Im Wolkenmodul für KAMM werden die Sedimentationsgeschwindigkeiten aller Hydrometeore berücksichtigt, auch für die sehr langsam fallenden Wolkentröpfchen, deren Endgeschwindigkeit im Bereich einiger cm s^{-1} liegt und in der Zeitskala üblicher Wolkenmodellierungen keine Relevanz hat. Weil aber das KAMM-Modell die Wechselwirkung von Atmosphäre und Vegetation detailliert beschreibt, wird die Sedimentation kleinster Tröpfchen hier aber mitgeführt. Bei der Simulation einer Nebellage mit der Berechnung des Wasserhaushalts einer betroffenen Vegetationsschicht spielt die Sedimentation auch kleiner Tropfen nämlich sehr wohl eine Rolle.

Sind Gesetzmäßigkeiten für die Endgeschwindigkeit w_ξ eines fallenden Hydrometeors ξ als Funktion des Teilchendurchmessers D in der Form $w_\xi = w_\xi(D)$ bekannt, dann kann prinzipiell mithilfe des Hydrometeorspektrums $n(D)$ die massengewichtete Fallgeschwindigkeit als Funktion des Hydrometeorgehalts ρq_ξ berechnet werden, wenn für ρ_ξ die Dichte reinen Wassers oder Eises eingesetzt wird:

$$w_\xi(\rho q) = \frac{\pi \rho_\xi}{6 \rho q} \int_0^\infty n(D) w_\xi(D) D^3 dD . \quad (4.49)$$

Damit liegt die Fallgeschwindigkeit in einer direkt für das Wolkenmodell verwendbaren Form vor. In dieser Version des Modells wurde jedoch auf bereits in der Literatur gebräuchliche Formeln $w_\xi(\rho q)$ zurückgegriffen.

Wolkenwasser q_c :

Laut Welch et al. (1986) gilt für das Fallgesetz der Wolkentropfen

$$w_c = -6.25 \times 10^1 \frac{\rho q_c}{\text{kg m}^{-3}} \left(\frac{\rho_{00}}{\rho} \right)^{0.4} \text{ m s}^{-1} , \quad (4.50)$$

wobei die höhere Endfallgeschwindigkeit bei geringeren Werten der Luftdichte (also in großen Höhen) gemäß Foote und du Toit (1969) ebenso wie in der Arbeit von Kogan (1991) über folgenden Faktor berücksichtigt wurde

$$f(\rho) = \left(\frac{\rho_{00}}{\rho} \right)^{0.4} . \quad (4.51)$$

Wolken, die schon so dicht sind, daß sich in ihnen Regen bilden kann, weisen typische Wolkenwassergehalte ρq_c der Größenordnung $10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$ auf. Hierfür folgt mit $\rho = \rho_{00}$ für $w_c = -6.25 \text{ cm s}^{-1}$, genau im Bereich dessen, was z. B. nach Houze (1993) oder Pruppacher und Klett (1997) zu erwarten wäre.

Wolkeneis q_i :

Wolkeneis wurde in die Modellgleichungen eingefügt, um den Vereisungsprozeß einer Gewitterwolke nach Überschreiten ihres Reifestadiums beschreiben zu können. Die in Wolken vorkommenden Eiskristalle weisen aber höchst variable Größenspektren und Kristallformen auf (Locatelli und Hobbs, 1974; Pruppacher und Klett, 1997), die in einem vereinfachenden Modell nicht alle berücksichtigt werden können. Die Arbeit von Starr und Cox (1985, vgl. Houze (1993)) stellt jedoch Formeln für die Fallgeschwindigkeit von Eiskristallen vor, die abschnittsweise durch einfache Funktionen des Wolkeneisgehalts q_i ausgedrückt werden können. Die kleinste dabei auftretende Geschwindigkeit

$$w_{i,\min} = -7.50 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$$

übertrifft demnach schon die Sedimentation der Wolkentröpfchen in sehr dichten Wasserwolken. Die weiteren stückweisen Funktionen lauten

$$w_{i,1} = -5.1245 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1} \log \left(\frac{\rho q_i}{\text{g m}^{-3}} \right) - 2.871 \times 10^0 \text{ m s}^{-1}$$

$$w_{i,2} = -1.1250 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1} \log \left(\frac{\rho q_i}{\text{g m}^{-3}} \right) - 1.050 \times 10^0 \text{ m s}^{-1}$$

$$w_{i,3} = -9.2409 \times 10^{-1} \text{ m s}^{-1} \log \left(\frac{\rho q_i}{\text{g m}^{-3}} \right) - 1.570 \times 10^0 \text{ m s}^{-1}$$

Die Auswahl erfolgt für $\rho q_i < 10^{-3} \text{ g m}^{-3}$ durch

$$w_i = \min[w_{i,\min}, \max(w_{i,1}, w_{i,2})] \left(\frac{40 \text{ kPa}}{p} \right)^{1/3}$$

und für $\rho q_i \geq 10^{-3} \text{ g m}^{-3}$ mittels

$$w_i = \min(w_{i,2}, w_{i,3}) \left(\frac{40 \text{ kPa}}{p} \right)^{1/3} .$$

Bei $\rho q_i = 1 \text{ g m}^{-3}$ beträgt w_i also bereits -1.570 m s^{-1} , was sicher nicht zu vernachlässigen ist. Weiterhin wird die dichteabhängige Korrektur der Fallgeschwindigkeit durch einen entsprechenden Faktor ersetzt, der nur den Luftdruck p berücksichtigt (Starr und Cox, 1985).

Flüssiger Niederschlag q_r :

Für den Fall, daß der Niederschlag nur aus flüssigen Regentropfen besteht, wird wie bei Xue et al. (1995) und Tartaglione et al. (1996) die Formel für w_r nach Klemp und Wilhelmson (1978) angewandt, allerdings hier ebenfalls mit der Dichteabhängigkeit nach Foote und du Toit (1969):

$$w_r = -1.416 \times 10^1 \left(\frac{\rho q_r}{\text{kg m}^{-3}} \right)^{0.1364} \left(\frac{\rho_{00}}{\rho} \right)^{0.4} \text{ m s}^{-1} . \quad (4.52)$$

Mischniederschlag q_r :

Wird beim Wolkenmodul die Eisphase mitberechnet, dann wird auch beim Niederschlag die Mischphase oberhalb der 0 °C–Grenze in sehr einfacher Weise berücksichtigt. Nach einem Vorschlag von Tartaglione et al. (1996) wird zwar weiterhin nur eine Hydrometeoriklasse q_r für den Niederschlag mitgeführt. Aber der Niederschlag fällt unterhalb der 0 °C–Grenze nach dem Gesetz (4.52), jedoch in größeren Höhen wird für $T_s \lesssim 253 \text{ K}$ eine bezüglich des Hydrometeoranteils konstante Fallgeschwindigkeit angenommen, die für Schnee, bzw. porösen Graupel und andere feste Niederschlagspartikeln mit Ausnahme von Hagel repräsentativ ist (Locatelli und Hobbs, 1974) und im Bereich

$$w_r \approx 0.5 - 3.0 \text{ m s}^{-1} \quad (4.53)$$

vom Anwender spezifiziert werden kann. Für die im Rahmen dieser Arbeit gezeigten Simulationsfälle wurden Werte von $w_r = 2$ bzw. 2.5 m s^{-1} verwendet. Zwischen der 0 °C–Grenze und T_s wird bilinear als Funktion der Temperatur zwischen den beiden asymptotischen Fallgesetzen interpoliert.

Nach den Ergebnissen von Tartaglione et al. (1996) wird mit dieser äußerst einfachen Modifikation der Niederschlagsfallgeschwindigkeit bereits dafür gesorgt, daß Niederschlag aus höheren und sehr kalten Schichten der Wolke wesentlich länger braucht, bis er aus der Wolke nach unten ausfällt. In dieser verlängerten Zeit kann er auf die Wolkendynamik deutlich größeren Einfluß nehmen, als das bei Anwendung der Gl. (4.52) der Fall wäre — diese liefert für große Regenwassergehalte ρq_r nämlich Geschwindigkeiten von annähernd 10 m s^{-1} . Die längere Einwirkzeit des Mischniederschlags auf die Dynamik der Wolkenkonvektion bewirkt eine realistischere Beschreibung des Wolkenabwinds und des Aufbaus einer mesozyklonalen Rotation in simulierten Superzellengewittern als bei reinen Wasserwolken.

Niederschlag und Niederschlagsrate am Boden

Neben dem am Erdboden integrierten Gesamtniederschlag \mathcal{P}_{ac} einer Simulation ist vor allem die Bestimmung der Regenrate \mathcal{R} am Unterrand der Atmosphäre von Interesse. Der Vertikalwind w verschwindet dort, so daß sich die in Anhang B vorgestellte Beziehung für die Niederschlagsrate vereinfacht. Sie lautet dann für jede einzelne Hydrometeorart ξ

$$\mathcal{R}_\xi = w_\xi(\rho q_\xi)\rho q_\xi \quad (4.54)$$

$$\text{bzw.} \quad \mathcal{R}_\xi = \frac{3.6 \times 10^6}{\rho_\xi} w_\xi(\rho q_\xi)\rho q_\xi , \quad (4.55)$$

wobei \mathcal{R} in der Gl. (4.54) in $\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ und in Gl. (4.55) in mm h^{-1} gegeben ist⁶. Das KAMM–Modell benötigt als Eingabegröße z. B. für das Boden–Vegetationsmodell die Regenrate \mathcal{R} als Massenflußdichte, während man in Radarmeteorologie und Hydrologie eher die anschaulichere Größe mm h^{-1} vorzieht.

⁶Dabei wird \mathcal{R} konventionell stets positiv angegeben, obwohl die Gln. (4.54) und (4.55) \mathcal{R} wegen der nach unten zeigenden Fallgeschwindigkeit w_ξ als negativ definite Größe festlegen.

Liegt somit \mathcal{R} am Erdboden vor, kann durch eine einfache Zeitintegration schon während der Modellsimulation die Niederschlagssumme \mathcal{P}_{ac} gewonnen werden:

$$\mathcal{P}_{ac} = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{R} dt \quad . \quad (4.56)$$

Dazu wird im KAMM-Modell der kleine Wolkenmikrophysik-Zeitschritt $\Delta t_c \approx 5\text{--}10$ s verwendet, so daß \mathcal{P}_{ac} dann sehr genau in mm, bzw. kg m^{-2} vorliegt und die Berechnungen innerhalb des Wolkenmodells abschließt.

Sättigungsdampfdrücke

Nach Tetens (1930), Murray (1967) und Bolton (1980) werden die Sättigungsdampfdrücke über Wasser e_{w_s} und Eis e_{i_s} einheitlich durch folgende Formeln beschrieben:

$$e_{w_s} = E_0 e^{A_w(T-T_3)/(T-B_w)} \quad , \quad e_{i_s} = E_0 e^{A_i(T-T_3)/(T-B_i)} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} A_w &= 1.72693882 \times 10^1 & , & & A_i &= 2.18745584 \times 10^1 \\ B_w &= 3.58600000 \times 10^1 \text{ K} & , & & B_i &= 7.66000000 \times 10^0 \text{ K} \quad . \end{aligned}$$

Von Emanuel (1994) wird dafür ein Konfidenzbereich von 0.3 % im Intervall $-35 \text{ }^\circ\text{C} \leq T \leq 35 \text{ }^\circ\text{C}$ angegeben. Auch im Boden- und Vegetationsmodell kommen diese Formeln jetzt einheitlich zum Einsatz.

Initialisierung konvektiver Einzelwolken

Um eine einzelne Schauer- oder Gewitterwolke im Modell anzuregen, wird analog zum Vorgehen von Klemp und Wilhelmson (1978), Xue et al. (1995) und Tartaglione et al. (1996) im KAMM-Modell eine Masse feucht-warmer Luft im Modellgebiet positioniert. Es handelt sich dabei um ein Rotationsparaboloid mit dem Zentrum bei den Koordinaten $\mathbf{r}_c = (x_c, y_c, z_c)$, wo die positive Temperaturabweichung maximal wird. Zum Rand des Paraboloids

$$r_{\text{Blase}} = \sqrt{\left(\frac{x-x_c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_c}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-z_c}{c}\right)^2} \leq 1 \quad (4.58)$$

hin fällt die Abweichung der Temperatur vom Grundzustand auf den Wert Null ab, wobei das zusätzlich überlagerte schwache weiße Rauschen ϵ_Θ eine gewisse Symmetriebrechung herbeiführt:

$$\Delta\Theta(r) = \cos^2 \frac{\pi}{2} r_{\text{Blase}} + \epsilon_\Theta \quad .$$

Weil die relative Feuchte innerhalb der Warmluft unverändert gelassen wird, muß bei um $\Delta\Theta$ höherer Lufttemperatur auch die spezifische Feuchte um Δq_d anwachsen. Es gilt mit $e_{\text{sat}}^* = e_{\text{sat}}(T + \Delta\Theta \Pi_0)$:

$$\Delta q_d = \frac{R_L}{R_D} \frac{e_{\text{sat}}^*}{p + \left(\frac{R_L}{R_D} - 1\right) e_{\text{sat}}^*} - q_d \quad .$$

Mit den Änderungen $\Delta\Theta$ und Δq_d ist dann folgende Erhöhung der äquivalentpotentiellen Temperatur Θ_e innerhalb der von (4.58) begrenzten Anomalie verbunden:

$$\Delta\Theta_e \simeq \Delta\Theta + \frac{L_{wd}}{c_p \Pi_0} \Delta q_d \approx \Delta\Theta + 2.5 \text{ K} \frac{\Delta q_d}{\text{g kg}^{-1}} \quad .$$

4.2 Numerische Lösung der Gleichungen

Beim KAMM in der Form mit parametrisierter Wolkenmikrophysik kommt dieselbe Numerik zum Einsatz wie in den bisherigen Versionen. Das ist einer der Vorteile der Vorgehensweise, das Gerüst der Grundgleichungen nicht prinzipiell zu verändern, sondern lediglich zu erweitern. Daher geht dieser Abschnitt nur insoweit auf numerische Lösungsverfahren und Randbedingungen ein, als daß diese von den Änderungen mittelbar oder unmittelbar betroffen sind. Deshalb muß auch eine Diskussion der räumlichen Diskretisierung (Shih et al., 1989; Fox–Rabinovitz, 1996) und der dazu adäquaten Einbindung der Druckrandbedingungen (Gresho und Sani, 1987) an dieser Stelle unterbleiben.

4.2.1 Diskretisierung

Die prognostischen Gleichungen des Modells werden räumlich zentriert mit einem Verfahren 2. Ordnung, zeitlich mit dem Euler–Verfahren 1. Ordnung diskretisiert, so daß sich prinzipiell ein Verfahren folgender Form ergibt:

$$\xi_{ijk}^{n+1} = \xi_{ijk}^n + \Delta t [\partial_t \xi]_{ijk}^n .$$

Dabei bezeichnen die tiefgestellten Indizes i, j, k die drei Raumrichtungen, der hochgestellte Index n die Zeitebene und Δt den Zeitschritt.

Eine Ausnahme bilden nur die Advektionsverfahren mit Flußkorrektur und Minimierung der Totalvariation (z. B. Engquist und Osher, 1981; Hugelmann, 1988; Munz, 1990; Dotzek, 1993; Förstner, 1998) für den Transportterm der prognostischen Gleichungen in Euler- oder Flußform gemäß der Überlegungen zur Analyse von Hauf (1980) im Abschnitt 3.2. Bei diesen Algorithmen wird ein gewichtetes Mittel aus der Prognose eines dispersionsfreien Verfahrens 1. Ordnung und eines diffusionsfreien Algorithmus 2. Ordnung gebildet, wobei für diese Mittelbildung der *superbee*–Limiter verwendet wird. Dabei verbindet man die Vorteile der beiden Verfahren und erreicht eine Vorschrift zur Berechnung der Advektion, die die gewünschten Erhaltungs- und Monotonieeigenschaften sehr gut reproduziert (Clappier, 1998).

Der Advektionsterm legt in anelastischen Modellen auch den generellen maximalen Zeitschritt Δt fest. Eine von Neumann–Stabilitätsanalyse (Peyret und Taylor, 1983; Press et al., 1992) führt auf das nach Courant et al. (1928) benannte CFL–Kriterium für den Advektionszeitschritt Δt_a in Abhängigkeit von den Maschenweiten $\Delta x, \Delta y$ und Δz sowie den am Gitterpunkt r_{ijk} relevanten Geschwindigkeiten

$$\Delta t_a = \frac{\mathcal{C}}{\frac{u + c_{ph}}{\Delta x} + \frac{v + c_{ph}}{\Delta y} + \frac{w + w_\xi}{\Delta z}} .$$

Dabei muß die CFL- oder Courantzahl $\mathcal{C} \leq 1$ sein, um numerische Stabilität zu gewährleisten. In KAMM gilt $\mathcal{C} = 0.85$, für die hier vorgestellten Simulationen lag Δt_a bei etwa 10–30 s. Mit c_{ph} wird hierbei die maximale Phasengeschwindigkeit von Schwerewellen angegeben, die nach Klemp und Wilhelmson (1978) mit der Modellgebiethöhe H und der Brunt–Väisälä Frequenz \mathcal{N} (Durrant und Klemp, 1982) abgeschätzt werden kann zu

$$c_{ph} \approx \frac{HN}{\pi} \quad (4.59)$$

und je nach Wahl von H und \mathcal{N} Werte von ca. 30 m s^{-1} bis etwa 100 m s^{-1} erreicht. Für hochreichende Konvektion mit $H \simeq 16\text{--}21 \text{ km}$ wird das CFL–Kriterium daher meist den bestimmenden Zeitschritt liefern, so daß $\Delta t = \Delta t_a$ gilt. Bei der Formulierung des turbulenten Austauschs A in den Bilanzgleichungen sowie bei der Wolkenmikrophysik sind die Zeitschritte Δt_d , bzw. Δt_c z. T. noch kleiner als

Δt_a . Um nicht mit diesem Zeitschritt in der Größenordnung weniger Sekunden rechnen zu müssen, bedient man sich bei Diffusion und Wolkenphysik der Zwischenschrittmethode (Janenko, 1969), indem man ganzzahlige Verhältnisse N_ξ der involvierten Zeitschritte bildet:

$$N_d = \frac{\Delta t}{\Delta t_d} \quad , \quad N_c = \frac{\Delta t}{\Delta t_c} \quad .$$

Die ohnehin schon kleinen Zeitschritte Δt_d bzw. Δt_c von typischerweise 5–10 s werden dabei nötigenfalls nach unten korrigiert, bis sich ein ganzzahliges Verhältnis N ergibt. Innerhalb eines Zeitschritts Δt werden dann N_d, N_c Zwischenschritte für die turbulente Diffusion und die Wolkenmikrophysik ausgeführt. Nach diesem generellen Verfahren können sämtliche prognostischen Größen ermittelt werden.

Für den Stördruck Π_d gilt das nicht, denn eine prognostische Gleichung für Π_d fehlt wegen der Vernachlässigung des Terms $\partial_t p$ in allen anelastischen Modellen. Man teilt deshalb auch die Integration der Impulsgleichung in zwei Zwischenschritte auf, bei denen der erste eine Prognose des neuen Geschwindigkeitsfelds \mathbf{v}^* bedeutet, während im zweiten Teilschritt aus dieser Prediktor–Lösung \mathbf{v}^* diagnostisch über die Poissongl. (4.10) der Stördruck Π_d derart bestimmt wird, daß das den Druckgradientterm einschließende endgültige Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v}^{n+1} die Anelastizitätsbedingung erfüllt. Die diskreten Rechenoperationen, die auf dieselbe Poissongleichung wie der analytische Fall im Abschnitt 4.1.4 führen, sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ijk}^* &= \mathbf{v}_{ijk}^n + \Delta t [\text{Adv.} + \text{Dif.} + \mathbf{Q}] \\ \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}_{ijk}^{n+1}) &= 0 = \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}_{ijk}^*) - \Delta t c_p \nabla \cdot (\Theta_\rho \nabla \Pi_{d_{ijk}}^{n+1}) \\ \Delta t c_p \nabla \cdot (\Theta_\rho \nabla \Pi_{d_{ijk}}^{n+1}) &= \nabla \cdot (\Phi \mathbf{v}_{ijk}^*) \\ \mathbf{v}_{ijk}^{n+1} &= \mathbf{v}_{ijk}^* - \Delta t c_p \Theta_\rho \nabla \Pi_{d_{ijk}}^{n+1} \quad . \end{aligned}$$

4.2.2 Randbedingungen

Die Besonderheit eines mesoskaligen Modells ist es, einen willkürlichen Ausschnitt der Atmosphäre darzustellen, der nur am unteren Rand, d. h. am Erdboden einen wirklichen physikalischen Rand hat, an dem echte Randbedingungen vorliegen (Fiedler, 1993). Der Oberrand der Modellatmosphäre ist bei sehr großen Modellgebiethöhen H , wie sie bei der Simulation hochreichender Feuchtkonvektion notwendig sind, über eine künstliche Dämpfungsschicht noch recht gut zu behandeln. Die größten Schwierigkeiten tauchen aber bei der Spezifikation der Randbedingungen an den Seiten auf, weil gerade über topographisch gegliedertem Gelände die Strömung auch in Randnähe sehr inhomogen sein kann, und Randbedingungen, die die Massenbilanz erfüllen und im Modellgebiet vorhandene Schwerewellen störungs- und reflexionsfrei entweichen lassen, nicht allgemein angebar sind (Warner et al., 1997).

Unterer Rand (Erdboden)

Am Erdboden gilt die Haftbedingung, d. h. $\mathbf{v} \equiv 0$. Potentielle Temperatur Θ und spezifische Feuchte q_d der Luft am Boden werden vom Boden- und Vegetationsmodell bestimmt bzw. bei der Berechnung der Neumann–Randwerte dieser Größen, u_* , Θ_* und q_* gemäß der im Abschnitt 4.1.10 dargestellten

Methode auch über unbewachsenem Boden vom Modell ermittelt. Für den Stördruck Π_d gilt bei der Lösung der elliptischen Gleichung ebenfalls ein Neumann–Randwert, weshalb der Stördruck nur bis auf eine Konstante bestimmt ist und daher im KAMM–Modell nur Π_0 und nicht die Summe $\Pi_0 + \Pi_d$ zur Bestimmung von Dichte und Temperatur verwendet werden kann. Der inhomogene Neumann–Randwert ergibt sich aus der dritten Bewegungsgleichung unter Beachtung der Randbedingungen für w :

$$d_t w|_{\text{Rand}} \equiv 0 = -c_p \bar{\Theta}_\rho|_{\text{Rand}} \partial_z \Pi_d|_{\text{Rand}} + \frac{A_w}{\bar{\rho}} \Big|_{\text{Rand}} .$$

Oberer Rand

Am Oberrand wird für die Geschwindigkeitskomponenten und für die skalaren Größen eine homogene Neumann–Randbedingung angenommen, d. h. $\partial_z \xi = 0$. Zusätzlich wird eine Dämpfungsschicht eingeführt und damit die früher verwendete Strahlungsrandbedingung nach Bougeault (1983) sowie Klemp und Durran (1983) umgangen. Hierbei werden im oberen Drittel des Modellgebiets zusätzliche Quellterme auf den rechten Seiten der prognostischen Bilanzgleichungen hinzugefügt (Xue et al., 1995). Diese Rayleigh–Reibungsterme haben die Form $\partial_t \xi = -\alpha(z) \xi$, wobei der Dämpfungskoeffizient $\alpha(z)$ zu

$$\alpha = \beta \left(1 - \cos \pi \frac{z - z_d}{H - z_d} \right) , \quad \beta \leq 1$$

gewählt wurde, damit diese Dämpfung oder Reibung in der Höhe z_d sanft einsetzt und zum Oberrand hin immer kräftiger wird. Weil bei hochreichender Konvektion normalerweise mit $H \gtrsim 18$ km gerechnet wird, bedeutet ein Drittel dieser Höhe immer noch, daß mindestens 12 km der Modellatmosphäre von dieser Maßnahme zur Dämpfung von Schwerewellen am Oberrand unbeeinflusst bleiben und zur vollwertigen meteorologischen Analyse zur Verfügung stehen.

Seitenränder

Während bisher im KAMM die Randbedingungen nach Orlanski (1976) in einer Formulierung nach Miller und Thorpe (1981) zum Einsatz kamen, wird in der aktuellen Version des Codes die Randbedingung nach Klemp und Wilhelmson (1978) in der erweiterten Form nach Clark (1982), Xue et al. (1995) und eigenen Modifikationen verwendet. Einen ausführlichen Test der Methoden findet man bei Hugelmann und Kleiser (1992).

Hierbei werden auf den Seitenrändern die folgenden reduzierten Bewegungsgleichungen gelöst, deren linke Seiten Formulierungen erster Ordnung des Wellenoperators \square darstellen:

$$d_t \bar{u} = \partial_t \bar{u} + [\bar{u} + c_{ph}] \partial_x \bar{u} = +f\bar{v} - \hat{f}\bar{w} \quad (4.60)$$

$$d_t \bar{v} = \partial_t \bar{v} + [\bar{v} + c_{ph}] \partial_y \bar{v} = -f\bar{u} . \quad (4.61)$$

Die noch unbekannte Phasengeschwindigkeit c_{ph} wird als Minimum der im Abschnitt 4.1.4 angegebenen lokalen Schallgeschwindigkeit c_s und der Klemp–Wilhelmson Abschätzung $c_{K\&W}$

$$c_{ph} = \min(c_s, c_{K\&W}) , \quad c_{K\&W} = \frac{H N}{\pi}$$

ermittelt. Dies liefert Werte für c_{ph} von ca. 30–100 m s^{-1} . Ergibt die Summe aus Strömungs- und Phasengeschwindigkeit ein Ausstrahlen, wird der Randwert nach obiger Formel berechnet, liefert sie ein

Einstrahlen, wird der Wert am Rand entweder unverändert gelassen oder mit einem schwachen Trend zum Grundzustand hin angetrieben, ähnlich wie bei der Dämpfungsschicht am Oberrand (Clark, 1982; Xue et al., 1995).

Die Randbedingungen nach Klemp und Wilhelmson (1978) stellen insofern einen Fortschritt gegenüber Orlanski (1976) dar, als daß sie einen festen Wert für die Phasengeschwindigkeit c_{ph} annehmen, während beim formal ähnlichen Verfahren nach Orlanski (1976) diese Geschwindigkeit lokal aus einseitigen finiten Differenzen am Rand abgeschätzt und außerdem die Strömungsgeschwindigkeit vernachlässigt wird:

$$d_t \bar{u} = \partial_t \bar{u} + c_{ph} \partial_x \bar{u} = +f\bar{v} - \hat{f}\bar{w} \quad (4.62)$$

$$d_t \bar{v} = \partial_t \bar{v} + c_{ph} \partial_y \bar{v} = -f\bar{u} \quad (4.63)$$

Wie von Durran et al. (1993) dargestellt, ist diese Schätzung aber sehr empfindlich gegenüber numerischen Rundungsfehlern und führt dazu, daß die ermittelte Phasengeschwindigkeit alsbald zwischen den Extremen 0 und $c_s \simeq 330 \text{ m s}^{-1}$ zu oszillieren beginnt. In der gegenwärtigen Version von KAMM ist es zwar auch möglich, die Randbedingung nach Orlanski (1976) mit der homogenen Phasengeschwindigkeit nach Klemp und Wilhelmson (1978) anzutreiben. Bei den in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Simulationen wurde aber stets die Form nach den Gln. (4.60–4.61) zum Einsatz gebracht.

Eine große Schwäche beider Strahlungsrandbedingungen ist es, die Massenerhaltung am Rand des Modellgebiets nicht exakt zu gewährleisten. Es ist zwar möglich, eine zumindest ausreichende Realisierung der „offenen“ Ränder zu erreichen, indem Instabilitäten von Schwerewellen am Rand reduziert werden, aber da in Fluiden Energietransport über Wellen stets mit einem Massenstrom gekoppelt ist, wird nur in Ausnahmefällen die Massenbilanz an Ober- und Seitenrändern erfüllt sein. Daher besteht normalerweise ein unphysikalischer Massenfluß durch den Rand, der z. B. Schichtmittel der Vertikalgeschwindigkeit deutlich verfälschen kann (Clark, 1979).

4.3 Anwendungsgebiete der neuen Modellversion

Das nun vorliegende Modell ist für Rechnungen ohne Wolken- und Niederschlagsbildungsprozesse in gleicher Weise geeignet wie die bisherige Modellversion bzw. noch weitergehend. Denn während schon der Einfluß der spezifischen Feuchte z. B. auf die atmosphärische Stabilität oder den Auftriebsterm nicht oder nur mit starken Vereinfachungen in der bisherigen KAMM-Version berücksichtigt wurde, ist die Luftfeuchte in der jetzigen Fassung komplett berücksichtigt. Damit kann durch Vergleichsrechnungen mit bekannten Fällen ohne Wolkenbildung, wie z. B. dem auch experimentell gut dokumentierten TRACT-Fall vom 16. September 1992 verglichen werden, ob der meist als vernachlässigbar angesehene Feuchteeinfluß nicht doch spürbare Veränderungen in den Modellergebnissen zeitigt. Darüberhinaus erlaubt die veränderte Form der Anelastizitätsbedingung eine beliebige vertikale Ausdehnung des Modellgebiets bis in die Stratosphäre hinein. Waren in früheren Simulationen manchmal Kompromisse notwendig in bezug auf die von Modellgebiet und großräumiger Anströmung vorgegebene Gebietsobergrenze H und die nicht mehr gewährleistete Anwendbarkeit der Inkompressibilitätsbedingung $\nabla \cdot \mathbf{v} \equiv 0$, so kann nun H problemlos so groß gewählt werden, daß vertikal laufende Schwerewellen vom Modell auch hinreichend aufgelöst werden. Allerdings darf in diesem Zusammenhang nicht vergessen werden, daß sich im oberen Drittel des Modellgebiets die künstlich vorgegebene Dämpfungsschicht befindet. Obwohl also die Anelastizitätsbedingung (4.8) prinzipiell eine Simulation der Atmosphäre bis in die Stratosphäre hinein erlaubt, entzieht die dortige Dämpfung der prognostischen Variablen zu ihren Grundzustandswerten hin der Prognose einen Großteil ihrer Grundlage.

Die eigentliche Anwendung des Modells liegt aber naturgemäß auf dem Schwerpunkt der Wolken- und Niederschlagssimulationen. Hier kommt das gesamte Wolkenmodell zum Tragen. Schon bei der Bildung flacher Wolken ohne Niederschlagsbildung wird der Einfluß der Beschattung der Gebiete unterhalb der Wolken auf die Strahlungsbilanz am Erdboden berücksichtigt, gleichzeitig verhindern die stattfindenden Phasenumwandlungen in der Atmosphäre die Ausbildung deutlicher Wasserdampf-Übersättigungen. In diesem Modus bieten sich vor allem Studien von Cu-hum Wolkenstraßen an (Reichmann, 1982; Hinzpeter, 1985; Dotzek, 1993; Weckwerth et al., 1997), welche bei atmosphärischer Rayleigh-Bénard Konvektion auftreten können. Die räumliche Auflösung des Modells muß dafür allerdings hinreichend fein sein, mit horizontalen Maschenweiten unterhalb etwa 1 km. Da dieser Konvektionstyp in erster Linie über ebenem Gelände (also Flachland oder Meeresoberflächen) auftritt, ist es hier nur in zweiter Linie wichtig, den Einfluß orographischer Inhomogenitäten zu studieren. Stattdessen bietet es sich eher an, den Einfluß unterschiedlicher Landnutzung, Bodenarten (Lynn et al., 1998) oder den Gegensatz Land/See zu untersuchen. Die in das Modell eingefügten Parametrisierungen zur Beschreibung von Wasserflächen (Dotzek und Emeis, 1996) erleichtern diese Anwendung und ermöglichen auch sehr kleinräumige Untersuchungen zum Einfluß großer Binnengewässer auf etwaige Wolkenbildungsprozesse. Nach dem Vorbild der Arbeiten von Segal et al. (1997a,b) kann für eine Simulation der Oberrheinregion mit feiner Auflösung oder innerhalb einer Gebietsnistung der Einfluß des Bodensees auf die Wolkenbildung in den angrenzenden Gebieten studiert werden.

Simulationen mit idealisierter Topographie bieten sich auch für klassische Studien hochreichender Feucht-konvektion an, wie z. B. die Entwicklung einzelner Gewitterzellen oder deren Wechselwirkung miteinander. Die Auswertung von Böenfronten oder der Test neuartiger Parametrisierungen der Wolkenmikrophysik sind möglich, wenn über homogenem Gelände mit Maschenweiten von etwa 1 km diese konvektiven Systeme nachgebildet werden. Solche Rechnungen (Klemp und Wilhelmson, 1978; Tartaglione et al., 1996) tragen sehr viel zum prinzipiellen Verständnis hochreichender konvektiver Systeme bei. Auch hier bietet es sich an, eine Kontrollsimulation für ebenes Terrain mit homogener Landnutzung mit Simulationen des gleichen Falls für veränderte Landnutzung oder einfache, exemplarische Geländeformen (Huntingford et al., 1998) zu vergleichen und so einen Eindruck vom Einfluß dieser topographischen Variationen auf die Wolkendynamik und letztlich die am Boden ankommende Niederschlagsmenge zu erhalten. Da die Lebensdauer solcher isolierter Wolkenformationen nur im Bereich einiger Stunden liegt, ist es zudem möglich, durch die Wahl eines geeignet großen Modellgebiets negativen Rückkopplungen von Konvektion und Reflexionen an den offenen Rändern aus dem Weg zu gehen.

Der dritte Anwendungsbereich des überarbeiteten KAMM-Modells ist schließlich die Berechnung der Wolken- und Niederschlagsverteilung in einem real vorliegenden mesoskaligen Gebiet. Hier sind aufgrund rechen technischer Grenzen kleine Maschenweiten von 1 km oder weniger nicht oder nur durch Gebietsnistungsverfahren zu erreichen. In den meisten Fällen werden daher die Maschenweiten eher im Bereich von 2 bis 4 km liegen, so wie auch bisher bei vergleichbaren Rechnungen mit dem KAMM-Modell (Dorwarth, 1985; Schädler, 1990; Adrian und Fiedler, 1991; Lenz, 1996). Dann muß man in Kauf nehmen, daß sich die Konvektion etwas träger verhalten wird, die Dynamik der konvektiven Systeme wird aber auch mit einer Auflösung bis 4 km noch realistisch beschrieben (Weisman et al., 1997). Erst für Maschenweiten jenseits von etwa 10 bis 12 km wäre eine eigene Konvektionsparametrisierung der subskaligen Konvektion notwendig (Kuo et al., 1997). Simulationen dieser Art stellen die absolute Ausnahme bei Anwendungen mit KAMM dar, deshalb wurde auf die Implementierung einer solchen Parametrisierung in KAMM verzichtet. Dieser dritte Anwendungsbereich erfordert aber in jedem Fall Simulationszeiten von 12 bis 48 h, damit die Konvektion Zeit hat, sich an den Antrieb vom Boden her anzupassen (*spin-up*). Damit sind auch die Anforderungen an die seitlichen, offenen Randbedingungen sehr hoch gesteckt (Warner et al., 1997), denn sowohl orogene Wellen als auch solche, die durch die Konvektion direkt ausgelöst werden (Finke, 1995), sollen nicht in unphysikalischer Weise vom Rand reflektiert werden.

