Kapitel 3

Das Modell KAMM

Das vorliegende Kapitel stellt das KAMM–Gleichungssystem vor, das bisher am Institut für Meteorologie und Klimaforschung zur Simulation konvektiver Strömungen verwendet wurde, das aber nicht geeignet ist, hochreichende Atmosphärenkonvektion und damit niederschlagsbringende Wolken zu beschreiben. Dennoch ist es sinnvoll, dieses Gleichungssystem den Beziehungen für tiefe Konvektion voranzustellen, denn es verdeutlicht sehr instruktiv die notwendigen Schritte von der Simulation der flachen atmosphärischen Grenzschichtkonvektion bis hin zur Bildung von Gewittern, die bis in die untere Stratosphäre vorstoßen können.

3.1 Gleichungssystem für flache Feuchtkonvektion ohne Wolken

Beim KAMM–Modell, das am Institut für Meteorologie und Klimaforschung der Universität Karlsruhe seit einer Reihe von Jahren als mesoskaliges Atmosphären–Biosphärenmodell zum Einsatz kommt (z. B. Dorwarth, 1985; Adrian und Fiedler, 1991; Lenz, 1996) kann bislang nur trockene, d. h. wolkenlose Grenzschichtkonvektion („Blauthermik“) simuliert werden. Das Modell verwendet räumlich gemittelte Bilanzgleichungen für den Impuls pro Masseneinheit $\boldsymbol{v} = (u,\ v,\ w)$, die Masse, die potentielle Temperatur Θ und die spezifische Feuchte q_d, wobei diese prognostischen Größen Ξ in einen stationären, hydrostatisch–geostrophischen Referenzzustand ξ_0 und eine raum–zeitliche mesoskalige Abweichung ξ aufgespalten werden:

$$\Xi \rightarrow \xi_0(\boldsymbol{r}) + \xi(\boldsymbol{r}, t) \quad .$$

Eine Ausnahme bildet nur die Exnerfunktion Π, die dimensionslose Form des Luftdrucks p mit

$$\Pi = \left(\frac{p}{p_{00}}\right)^{R/c_p} \quad ,$$

von deren Referenzzustand Π_0 zwei Abweichungen unterschieden werden, Π_d und Π_a. Die erste bezeichnet den dynamischen Stördruck, der sich aufgrund der Inhomogenitäten des Strömungfelds ergibt, die zweite den Auftriebsstördruck, der durch Dichteinhomogenitäten im Schwerefeld der Erde hervorgerufen wird. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß der Grundzustand Π_0 über die Identität

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\Pi_0 \equiv 0$$

unter den gemachten Annahmen der Hydrostasie und der Geostrophie auf die thermischen Windbeziehungen führt.

Insgesamt erhält man dann mit dem Querstrich als räumlichem Mittelungsoperator:

$$d_t\,\bar{u} = \partial_t\,\bar{u} + \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\bar{u} + A_u \quad = \quad -c_p\bar{\Theta}_v\partial_x\left(\Pi_d + \Pi_a\right) + f\,(\bar{v} - \frac{\bar{\Theta}_v}{\Theta_0}v_0) \tag{3.1}$$

$$d_t\,\bar{v} = \partial_t\,\bar{v} + \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\bar{v} + A_v \quad = \quad -c_p\bar{\Theta}_v\partial_y\left(\Pi_d + \Pi_a\right) - f\,(\bar{u} - \frac{\bar{\Theta}_v}{\Theta_0}u_0) \tag{3.2}$$

$$d_t\,\bar{w} = \partial_t\,\bar{w} + \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\bar{w} + A_w \quad = \quad -c_p\bar{\Theta}_v\partial_z\;\Pi_d \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\bar{\boldsymbol{v}} \quad = \quad 0 \tag{3.4}$$

$$d_t\,\bar{\Theta} = \partial_t\,\bar{\Theta} + \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\bar{\Theta} + A_\Theta \quad = \quad 0 \tag{3.5}$$

$$d_t\,\bar{q}_d = \partial_t\,\bar{q}_d + \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\bar{q}_d + A_{q_d} \quad = \quad 0 \quad . \tag{3.6}$$

Als zusätzliche Größen treten noch der 1. Coriolisparameter f und die virtuell–potentielle Temperatur

$$\Theta_v = \Theta\left[1 + \left(\frac{R_D}{R_L} - 1\right)q_d\right]$$

auf, die den Einfluß der spezifischen Feuchte q_d auf die Luftdichte ρ über einen mit dem Verhältnis der individuellen Gaskonstanten von Luft, R_L und Wasserdampf, R_D gewichteten Faktor mitberücksichtigt. Die mit A_ξ bezeichneten Terme des turbulenten Austauschs werden im Abschnitt 3.1.3 besprochen.

Zusätzlich beschreiben die beiden Gln. (3.18–3.19) die zeitliche Tendenz der Bodenfeuchte η_w und der Bodentemperatur T_b. Dabei wird durch dieses Boden- und Vegetationsmodell auch der Vegetationseinfluß und die Strahlungsbilanz am Erdboden mitberücksichtigt. Näheres hierzu findet man bei Schädler (1990) und Lenz (1996), wo außerdem eine ausführliche Beschreibung des Atmosphärenmodells (3.1–3.6) und seiner numerischen Lösung vorgestellt wird. Daher wird im folgenden nur kurz auf die einzelnen Gleichungen separat eingegangen.

3.1.1 Grundzustand

Der Grundzustand im bisherigen KAMM–Modell wird durch folgende Relationen festgelegt (vgl. auch Lenz, 1996), die entstehen, wenn das gesamte Gleichungssystem unter den Annahmen

- der Divergenzfreiheit und Adiabasie
- der Geostrophie auf einer Ebene $f = 2\Omega_E \sin\phi = \text{const.}$
- der Vernachlässigung des zweiten Coriolisparameters $\hat{f} = 2\Omega_E\cos\phi$
- der Hydrostasie mit konstant gesetzter Schwerebeschleunigung $g(\phi, z) = g_{00}$
- der Abwesenheit von Vertikalbewegungen $w_0 = 0$
- der Abwesenheit jeglicher Luftfeuchte $q_{d0} \equiv 0$

für ein Kräftegleichgewicht formuliert wird:

$$d_t\, u_0 = 0 \quad = \quad -c_p \Theta_0 \partial_x\, \Pi_0 + f v_0 \tag{3.7}$$

$$d_t\, v_0 = 0 \quad = \quad -c_p \Theta_0 \partial_y\, \Pi_0 - f u_0 \tag{3.8}$$

$$d_t\, w_0 = 0 \quad = \quad -c_p \Theta_0 \partial_z\, \Pi_0 - g_{00} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v}_0 = 0 \quad &= \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v}_0) - \boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho_0 \\ &= \quad -\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho_0 \quad \text{(wegen Geostrophie)} \end{aligned} \tag{3.10}$$

$$d_t\, \Theta_0 \quad = \quad 0 \quad . \tag{3.11}$$

Die Modellgln. (3.1–3.6) werden danach für die Abweichung von diesem Grundzustand formuliert, wobei bei der Exnerfunktion Π diese mesoskalige Variation wie erwähnt zweifach aufgespalten ist, denn der Auftriebsterm in der dritten Bewegungsgleichung (3.15) läßt sich als Gradient des Schwerepotentials formal mit dem Druckgradientterm vereinigen und als Gradient des Auftriebsstördrucks Π_a

$$c_p \bar{\Theta}_v \partial_z\, \Pi_a = g_{00} \frac{\bar{\Theta}_v - \Theta_0}{\Theta_0}$$

auf die horizontalen Impulskomponenten aufschlagen (Das, 1979). Es verbleibt dann noch der dynamische Stördruck Π_d, der in anelastischen Modellen wie KAMM diagnostisch bestimmt werden muß.

3.1.2 Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung, die die Massenerhaltung beschreibt, ist in KAMM in der genäherten Boussinesq–Form für flache Konvektion gegeben. Dabei wird die Atmosphäre im Mittel als divergenzfrei angenommen:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \bar{\boldsymbol{v}} = 0 \quad . \tag{3.12}$$

Diese Näherung ist jedoch nur für die atmosphärische Grenzschicht von etwa 1 bis 2 km Mächtigkeit gut erfüllt. Ihre Anwendung auf Modellgebiete mit einer Höhe H von 5 bis 8 km, wie in bisherigen Anwendungen mit KAMM, ist bereits problematisch. Für die geplanten Wolken- und Niederschlagssimulationen scheint es nicht sinnvoll, bei Gl. (3.12) für die Massenbilanz zu bleiben, sondern notwendig, allgemeingültigere Formulierungen hierfür zu finden, die auch $H = 15$ bis 21 km möglich machen.

3.1.3 Impulsgleichung

Die Bilanzgleichungen des Impulses pro Masseneinheit

$$d_t\, \bar{u} = \partial_t\, \bar{u} + \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \bar{u} + A_u \quad = \quad -c_p \bar{\Theta}_v \partial_x\, (\Pi_d + \Pi_a) + f(\bar{v} - \frac{\bar{\Theta}_v}{\Theta_0} v_0) \tag{3.13}$$

$$d_t\, \bar{v} = \partial_t\, \bar{v} + \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \bar{v} + A_v \quad = \quad -c_p \bar{\Theta}_v \partial_y\, (\Pi_d + \Pi_a) - f(\bar{u} - \frac{\bar{\Theta}_v}{\Theta_0} u_0) \tag{3.14}$$

$$d_t\, \bar{w} = \partial_t\, \bar{w} + \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \bar{w} + A_w \quad = \quad -c_p \bar{\Theta}_v \partial_z\, \Pi_d \tag{3.15}$$

basieren auf den Euler–Gleichungen, welche die Strömung eines Fluides ohne innere Reibung beschreiben. Deshalb fehlt hier der betragsmäßig sehr kleine Einfluß der molekularen Viskosität ν. Stattdessen enthalten die Gln. (3.13–3.15) die turbulenten Austauschterme A_ξ, die über einen Gradientansatz gemäß der K–Theorie mit K_ξ als dem als Skalar angenommenen turbulenten Diffusionskoeffizienten formuliert sind (vgl. Adrian und Fiedler, 1991):

$$A_\xi = \boldsymbol{\nabla} \cdot [-K_\xi \, \boldsymbol{\nabla} \xi] \quad .$$

Die Corioliskraft ist nur mit den beiden Termen proportional zum ersten Coriolisparameter $f = 2\,\Omega_E \sin\phi$ vorhanden. Die Ausdrücke mit dem zweiten Coriolisparameter $\hat{f} = 2\,\Omega_E \cos\phi$, der in mittleren Breiten ϕ von gleicher Größenordnung ist wie f, werden jedoch vernachlässigt. Sie sind zwar dem Betrage nach klein, aber wichtig z. B. bei der Anregung der schon angesprochenen Rollenkonvektion in der atmosphärischen Grenzschicht. Eine Besonderheit des KAMM–Modells ist es, gemäß Das (1979) den Auftriebsterm aus der dritten Bewegungsgleichung zu eliminieren und stattdessen als einen Gradienten des „Auftriebs–Stördrucks“ Π_a in den beiden ersten Bilanzgln. (3.13) und (3.14) einzuführen. Dies ist formal möglich, weil der Auftriebsterm proportional zur Schwerebeschleunigung g ist, die wiederum als Gradient des Schwerepotentials darstellbar ist.

Die Gleichungen berücksichtigen bisher nur den Einfluß der spezifischen Feuchte q_d, nicht aber das Vorhandensein von Hydrometeoren q_ξ. Daher sollte neben einer Vervollständigung des Coriolisterms auch die verallgemeinerte virtuell–potentielle Temperatur Θ_ρ

$$\Theta_\rho = \Theta \left[1 + \left(\frac{R_D}{R_L} - 1 \right) q_d - \sum q_\xi \right] = \Theta_v - \Theta \sum q_\xi$$

in die Gln. (3.13–3.15) Eingang finden, die von manchen Autoren als Dichtetemperatur bezeichnet wird (Emanuel, 1994). Sie berücksichtigt den nicht zu vernachlässigenden Einfluß der Hydrometeore auf die Luftdichte ρ.

3.1.4 Wärmegleichung

Die Bilanzgleichung der Entropie oder kurz die Wärmegleichung lautet im KAMM–Modell bisher

$$d_t\,\bar{\Theta} = \partial_t\,\bar{\Theta} + \bar{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{\nabla}\bar{\Theta} + A_\Theta = 0 \quad . \tag{3.16}$$

In dieser Form ohne Quellterme stellt Gl. (3.16) eine reine Erhaltungsgleichung der potentiellen Temperatur Θ dar, die ein Maß für die Entropie s trockener Luft ohne Hydrometeore ist. Mit dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik erhält man nämlich

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T}\,[c_p\,dT - v\,dp] = c_p \left[\frac{dT}{T} - \frac{R_L}{c_p}\frac{dp}{p} \right] = c_p\,d\ln\Theta \quad .$$

Mit der Gl. (3.16) können weder Phasenumwandlungen des Wasserdampfs noch diabatische Wärmequellen, wie z. B. die Divergenz von Strahlungsflüssen berücksichtigt werden. Neben den eigentlichen Bilanzgleichungen für die H_2O–Komponenten wird also auch die Wärmegleichung durch die Einführung des Wolkenmodells stark beeinflußt werden.

3.1.5 Feuchtegleichung

Als einzige Erscheinungsform des Wassers in der Atmosphäre wird bisher der Wasserdampf durch eine Bilanzgleichung der spezifischen Feuchte q_d berücksichtigt:

$$d_t\,\bar{q}_d = \partial_t\,\bar{q}_d + \bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\bar{q}_d + A_{q_d} = 0 \quad . \tag{3.17}$$

Diese stellt wiederum nur eine Erhaltungsgleichung dar, d. h. Phasenumwandlungen werden damit im Modell ausgeschlossen. Für Simulationen mit nur sehr geringem Feuchteeinfluß kann mit Gl. (3.17) gearbeitet werden, aber falls die Atmosphäre viel Wasserdampf enthält, können lokal Übersättigungen der Luft mit Wasserdampf entstehen, die nicht durch Kondensation zu Wolken abgebaut werden. Dadurch entstehen in den Impulsgleichungen (3.13–3.15) unrealistisch hohe Auftriebsdruckgradient–Beschleunigungen, die wiederum zu verfälschten Strömungsfeldern führen. Auf diese Weise kann ein positiv rückgekoppelter Prozeß angeregt werden, der die numerische Lösung von der „wahren“ wegführt. Aus diesem Grund wurde das KAMM in der hergebrachten Version auch stets nur mit recht geringen Werten für die Luftfeuchte initialisiert. An diesem Punkt wird die Einführung des Wolkenmodells dazu führen, daß beliebige Feuchteprofile verwendet werden können.

3.1.6 Boden- und Vegetationsmodell

Das Boden- und Vegetationsmodell enthält die zwei prognostischen Gleichungen für die Bodenfeuchte η_w und die Bodentemperatur T_b:

$$\partial_t\,\eta_w \;=\; \partial_z\,\left[K(\eta_w)\,d_{\eta_w}\Psi(\eta_w)\,\partial_z\,\eta_w\right] + d_{\eta_w}K(\eta_w)\,\partial_z\,\eta_w - \frac{1}{\rho_w}x_{\mathrm{root}}\frac{V_{tr}}{L_{wd}} \tag{3.18}$$

$$\partial_t\,T_b \;=\; \frac{1}{c_b(\eta_w)}\partial_z\,\left[\lambda_b(\eta_w)\,\partial_z\,T_b\right] \quad . \tag{3.19}$$

Die Gln. (3.18) und (3.19) wurden von Schädler (1990) und Lenz (1996) detailliert beschrieben. Da innerhalb des Boden- und Vegetationsmodells die Luftfeuchte und auch Taubildung und Niederschlag berücksichtigt werden, müssen an dieser Stelle von KAMM keine tiefgreifenden Änderungen vorgenommen werden. Stattdessen ist zu klären, in welcher Weise das Boden- und Vegetationsmodell reagiert, wenn im Bereich eines simulierten Starkregens tatsächlich große Niederschlagsmengen auf Bewuchs und Erdreich fallen. Denn weil bisher die Prozesse im Boden nur bis zu einer Tiefe von etwa 1 m prognostiziert werden und an diesem unteren Rand angenommen wird, daß

$$\partial_z\,T_b|_{z_{b,\max}} \equiv 0 \quad , \qquad \partial_z\,\eta_w|_{z_{b,\max}} \equiv 0$$

gilt, können Probleme auftreten, sobald das Niederschlagswasser doch in größeren Mengen innerhalb der Simulationszeit des Modells bis in die Tiefe $z_{b,\max} \approx 1$ m vordringt und dort diese homogenen Neumann–Randbedingungen verletzt.

3.2 Schritte zur Beschreibung von Wolken und Niederschlag

Für die Simulation von Wolken reicht das Gleichungssystem (3.1–3.6) also noch nicht aus, denn es fehlen die Einflüsse von Wolken– und Niederschlagsteilchen sowohl in der Impulsbilanz wie auch in der Wärmegleichung. Die entsprechenden Bilanzgleichungen für die Partialmassen von Wolkenwasser q_c, Wolkeneis q_i und Niederschlagswasser q_r müssen ebenfalls noch hinzugefügt werden. Im Einklang mit den

Ausführungen von Doms und Herbert (1985), Houze (1993) und Xue et al. (1995) wurde die Entscheidung getroffen, das Wolkenmodell mithilfe einer parametrisierten Wolkenmikrophysik zu formulieren, d. h. es treten nur integrale Größen wie die Gehalte $\rho\, q_\xi$ der einzelnen Hydrometeore q_ξ auf, und es werden keine Größenverteilungen prognostiziert. Die einzelnen Prozesse der Wechselwirkung zwischen den verschiedenen Wolken- und Niederschlagsteilchen werden nicht direkt berechnet, sondern nur in ihren Netto–Effekten. Das erste Schema dieses Typs wurde wie erwähnt von Kessler (1969) vorgestellt und wird deshalb heute kurz als Kessler–Schema bezeichnet. Im Gegensatz zu anderen Schemata, wie sie von Nickerson et al. (1986) und Beheng (1994) beschrieben werden und prognostische Gleichungen für die Anzahl- und die Massendichten, N und $\rho\, q$ eines Teilchenspektrums mitführen, wird beim Schema vom Kessler–Typ für jeden Hydrometeor nur eine integrale Größe mitgeführt: die volumenspezifische Partialmasse $\rho\, q$. Mit dieser einzigen Größe steht zwar nur wenig Information über das Teilchenspektrum der Hydrometeore zur Verfügung, aber da bezüglich der Parameter des Spektrums große Variationsbreiten existieren und für eine spezielle Fallstudie normalerweise keine gesicherten Werte hierfür vorliegen, kann dieser Informationsverlust in Kauf genommen werden. Aufgrund ihrer prinzipiellen Einfachheit haben Schemata vom Kessler–Typ dagegen den Vorteil, sehr bequem um zusätzliche parametrisierte wolkenmikrophysikalische Prozesse erweiterbar zu sein und nur einen relativ geringen Rechenaufwand zu verursachen. Dabei erreichen sie aber einen hohen Grad an Realitätsnähe, weswegen sie auch heute noch oft zur Anwendung kommen (z. B. Klemp und Wilhelmson, 1978; Tartaglione et al., 1996).

Wie bereits betont, ist die diagnostische Form $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ der vollständigen Massenbilanz nicht zur Beschreibung hochreichender Konvektion geeignet und muß durch eine genauere Approximation der Kontinuitätsgleichung ersetzt werden, die aber weiterhin diagnostisch sein sollte, um Schallwellen aus der Lösung des Modellgleichungssystem herauszufiltern. Hierbei tauchen interessante Aspekte der Gleichungssysteme auf, die von Hauf (1980) ausführlich diskutiert wurden. Im Gegensatz zur allgemeinen Ansicht, die Filterung von Schallwellen im Gleichungssystem sei alleine durch die Angabe der approximierten Kontinuitätsgleichung (3.12) gewährleistet, muß nämlich auch die Impulsbilanz in einer passenden Form gegeben sein. Wird das nicht beachtet, ist das Gleichungssystem nicht in sämtlichen Raumrichtungen schallgefiltert und deshalb nicht effektiv zu integrieren. Die beiden für die Impulsgleichung in Frage kommenden Varianten sind

$$
\begin{aligned}
d_t\, \boldsymbol{v} = \partial_t\, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p + \ldots && \text{Eulerform} \\
d_t\, \boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}[\partial_t\, (\rho \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho \boldsymbol{v} \boldsymbol{v})] &= -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} p + \ldots && \text{Flußform} \quad .
\end{aligned}
$$

Ebenso muß beachtet werden, daß die Form der Bilanzgleichungen für Masse und Wärme implizit eine komplette oder teilweise Vernachlässigung des Terms $d_t\, p$ in der prognostischen Gleichung für den Druck beim vollständig kompressiblen System nach sich zieht (Hauf, 1980). Das ergibt dann folgende drei gültige Varianten:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{v} &= 0 \quad , && \text{Impulsgln. in Eulerform} \quad , && d_t\, p = 0 && (3.20) \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 \boldsymbol{v}) &= 0 \quad , && \text{Impulsgln. in Flußform} \quad , && d_t\, p = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} p && (3.21) \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 \Theta_{\rho 0} \boldsymbol{v}) &= 0 \quad , && \text{Impulsgln. in Flußform} \quad , && d_t\, p = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} p \quad . && (3.22)
\end{aligned}
$$

Wegen Gl. (3.12) darf also beim bisherigen KAMM der Advektionsterm nicht in Flußform gegeben sein, während er diese Form in den künftigen wolkenphysikalischen Anwendungen haben muß. Im Fall flacher Konvektion und Gl. (3.20) ist das Druckfeld demnach gänzlich zeitunabhängig, weil sowohl $\partial_t\, p$ als auch $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} p$ jeweils separat verschwinden, wogegen in den beiden anderen Fällen nur $\partial_t\, p \equiv 0$ angenommen wird. Das Nullsetzen dieses Terms verhindert letztlich zusammen mit der passenden Form des Advektionsterms die Ausbreitung von Schallwellen.