Anhang C

Eigenschaften der Γ -Funktion

Die Γ -Funktion wird gewöhnlich durch folgende Integralrelation definiert

$$\Gamma(\gamma) = \int_0^{\infty} x^{\gamma-1} e^{-x} dx \quad , \quad (\gamma > 0) \quad (\text{C.1})$$

und hat die prinzipiellen Eigenschaften:

$$\Gamma(n+1) = n! \quad , \quad \Gamma(\gamma+1) = \gamma \Gamma(\gamma) \quad .$$

Für negative, nichtganzzahlige Werte von γ können die nachstehenden allgemeinen Beziehungen verwendet werden:

$$\Gamma(\gamma) \Gamma(1-\gamma) = \frac{\pi}{\sin \pi \gamma} \quad ; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \quad .$$

Falls die obere Integrationsgrenze der Gl. (C.1) endlich ist, z. B. bei der Berechnung des Anzahl- oder Volumen-Mediandurchmessers, dann gilt für ganzzahlige Werte von γ die folgende Rekursionsformel

$$\int_0^X x^{\gamma-1} e^{-x} dx = -x^{\gamma-1} e^{-x} \Big|_0^X + (\gamma-1) \int_0^X x^{\gamma-2} e^{-x} dx \quad , \quad (\gamma \geq 1) \quad . \quad (\text{C.2})$$

Für beliebige γ -Werte muß der Term e^{-x} in seine Taylorreihe entwickelt werden. Die sich dabei ergebende unendliche Reihe kann dann Term für Term integriert werden und führt auf

$$\begin{aligned} \int_0^X x^{\gamma-1} e^{-x} dx &= \int_0^X x^{\gamma-1} \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \right] dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{X^{\gamma+n}}{\gamma+n} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Sind beide Grenzen endlich, d. h. berücksichtigt man minimale und maximale Teilchengrößen, dann ergibt sich

$$\int_{X_u}^{X_o} x^{\gamma-1} e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\frac{X_o^{\gamma+n}}{\gamma+n} - \frac{X_u^{\gamma+n}}{\gamma+n} \right] \quad . \quad (\text{C.4})$$