

Anhang B

Berechnung des Radarreflektivitätsfaktors

Um idealisierte Radarbilder aus Modelldaten ableiten zu können, benötigt man ein detailliertes Wissen, wie die spektrale Verteilung der einzelnen Hydrometeore zu Größen wie des Radarreflektivitätsfaktors Z , der Niederschlagsrate \mathcal{R} oder dem Hydrometeor Gehalt ρq beiträgt. Die Kenntnis ist notwendig, um die Wolken- als auch die Niederschlagsprozesse zwischen Wolkenbasis und Erdboden konsistent beschreiben zu können. Aus diesem Grund wird hier auf die zugrundeliegende Wolkenmikrophysik eingegangen, soweit sie die Berechnung der gesuchten Größen betrifft.

B.1 Wolkenmikrophysik

B.1.1 Hydrometeorspektren

Für sämtliche mikrophysikalischen Berechnungen in diesem Abschnitt wird angenommen, daß die Teilchengrößenverteilung einer Γ -Funktion des dimensionslosen Hydrometeordurchmessers D/D_0 , des Formparameters γ und der Teilchenlast N_0 in m^{-4} (bzw. in konventionellen Einheiten $\text{mm}^{-1} \text{m}^{-3}$) folgt:

$$n(D) = N_0 \left(\frac{D}{D_0} \right)^{\gamma-1} e^{-D/D_0} \quad , \quad (\gamma > 0) \quad . \quad (\text{B.1})$$

Die Anwendung der Γ -Funktion hat eine lange Tradition in der Wolkenmikrophysik (Clark, 1974; Dorwarth, 1979; Ulbrich, 1983, 1994; Pruppacher und Klett, 1997), denn neben der Ähnlichkeit zwischen der Γ -Funktion und beobachteten Hydrometeorspektren haben Γ -Funktionen einige attraktive mathematische Eigenschaften, die sie für wolkenmikrophysikalische Berechnungen besonders geeignet erscheinen lassen (vgl. Anhang C).

Daher wird diese Form des Spektrums für alle Hydrometeorarten angewandt¹. Das Spektrum erreicht sein Maximum im Punkt D_{\max} , $n_{\max} = n(D_{\max})$,

$$D_{\max} = D_0(\gamma - 1) \quad , \quad n_{\max} = n(D_{\max}) = N_0(\gamma - 1)^{\gamma-1} e^{-(\gamma-1)} \quad .$$

¹Die bekannte exponentielle Größenverteilung nach Marshall und Palmer (1948) für Regentropfen

$$n_r(D) = N_{0r} e^{-\lambda_r D} \quad , \quad (\lambda_r = D_{0r}^{-1})$$

ist der Spezialfall mit $\gamma = 1$ für Gl. (B.1). Alle Resultate, die in diesem Abschnitt für Regentropfen gewonnen werden, können im Prinzip auch für Marshall-Palmer Verteilungen ausgedrückt werden.

Tabelle B.1: Verwendete Charakteristika der Hydrometeoriklassen. Hier wurden D_0 und γ als Eingabe-
größen verwendet. N_0 wurde für ρq_c und ρq_i nach Gl. B.18 berechnet.

ρq	$\frac{N_0}{\text{mm}^{-1} \text{m}^{-3}}$	$\frac{D_0}{\text{mm}}$	γ	$\frac{n_{\max}}{N_0}$	$\frac{D_{\max}}{D_0}$	$\frac{\tilde{D}_N}{D_0}$	$\frac{\bar{D}}{D_0}$	$\frac{\tilde{D}_*}{D_0}$	$\frac{\tilde{D}_V}{D_0}$	$\frac{\bar{D}}{D_0}$
ρq_i	3.0×10^6	10^{-1}	4.0	1.3×10^0	3.0	3.67	4.0	4.93	6.67	7.0
ρq_c	8.0×10^{10}	10^{-2}	3.0	5.4×10^{-1}	2.0	2.67	3.0	3.91	5.67	6.0
ρq_r	8.0×10^3	10^0	2.0	3.7×10^{-1}	1.0	1.68	2.0	2.88	4.67	5.0
ρq_r	8.0×10^3	10^0	1.0	1.0×10^0	0.0	0.69	1.0	1.82	3.67	4.0

Tab. B.1 zeigt diese und andere relevante Parameter der Verteilungen für unterschiedliche Hydrometeoriklassen. Im Gegensatz zur allgemein geübten Praxis wird kein exponentielles Spektrum für die Regentropfen angenommen. Nach den Ergebnissen von Ulbrich (1994), in denen für Regen $\gamma = 1.71 \pm 1.99$ gefunden wurde anstatt $\gamma = 1$, wird hier $\gamma = 2$ für diesen Fall gewählt. Bei Wolkentropfen wird der oft benutzte Wert $\gamma = 3$ und für Wolkeneiskristalle sogar ein noch breiteres Spektrum mit $\gamma = 4$ angesetzt. Zum Vergleich stellt Tab. B.1 auch die entsprechenden Werte eines exponentiellen Marshall–Palmer Regentropfenspektrums dar.

B.1.2 Momente

Die Momente \mathcal{M}^m von m -ter Ordnung der Teilchengrößenverteilung (B.1) sind gegeben durch

$$\mathcal{M}^m = N_0 \int_0^{\infty} \left(\frac{D}{D_0} \right)^{\gamma-1} D^m e^{-D/D_0} dD = N_0 D_0^{m+1} \Gamma(\gamma + m) \quad .$$

Da die Parameter N_0 , D_0 und γ der Verteilung $n(D)$ mithilfe der Momente eliminiert werden sollen, werden die wichtigsten von ihnen hier mittels der Beziehungen im Anhang C berechnet und dargestellt.

Das nullte Moment, die Teilchenzahl N ist gegeben durch

$$N = \mathcal{M}^0 = N_0 \int_0^{\infty} \left(\frac{D}{D_0} \right)^{\gamma-1} e^{-D/D_0} dD = N_0 D_0 \Gamma(\gamma) \quad . \quad (\text{B.2})$$

Das erste Moment \mathcal{M}^1 , dividiert durch \mathcal{M}^0 liefert den anzahlgewichteten mittleren Durchmesser \bar{D} :

$$\bar{D} = \frac{\mathcal{M}^1}{\mathcal{M}^0} = \frac{N_0}{N} \int_0^{\infty} \left(\frac{D}{D_0} \right)^{\gamma-1} D e^{-D/D_0} dD = \gamma D_0 \quad . \quad (\text{B.3})$$

Bis auf einen Faktor, der die Hydrometeordichte ρ_h enthält, ergibt das dritte Moment den Hydrometeor-
gehalt pro Volumeneinheit:

$$\rho q = \frac{\pi}{6} \rho_h \mathcal{M}^3 = \frac{\pi}{6} \rho_h N_0 \int_0^{\infty} \left(\frac{D}{D_0} \right)^{\gamma-1} D^3 e^{-D/D_0} dD = \frac{\pi}{6} \rho_h N_0 D_0^4 \Gamma(\gamma + 3) \quad . \quad (\text{B.4})$$

Das vierte Moment \mathcal{M}^4 , dividiert durch \mathcal{M}^3 definiert den massengewichteten mittleren Durchmesser \bar{D} , der vom durch Gl. (B.3) gegebenen \bar{D} abweicht:

$$\bar{D} = \frac{\mathcal{M}^4}{\mathcal{M}^3} = \frac{N_0}{\mathcal{M}^3} \int_0^\infty \left(\frac{D}{D_0}\right)^{\gamma-1} D^4 e^{-D/D_0} dD = (\gamma + 3)D_0 = \bar{D} + 3D_0 \quad . \quad (\text{B.5})$$

Man beachte, daß ein weiterer mittlerer Durchmesser abgeleitet werden kann, wenn man den Hydrometeorergehalt durch die Gesamtzahl aller Hydrometeore teilt:

$$\frac{\mathcal{M}^3}{\mathcal{M}^0} = \frac{6 \rho q}{\pi \rho_h N} = (\gamma + 2)(\gamma + 1)\gamma D_0^3 = \tilde{D}_*^3 \quad . \quad (\text{B.6})$$

Schließlich liefert das sechste Moment bei Gültigkeit der Rayleigh-Näherung für sphärische Teilchen den Radarreflektivitätsfaktor \mathcal{Z} , der umgangssprachlich auch nur als Radarreflektivität bezeichnet wird:

$$\mathcal{Z} = \mathcal{M}^6 = N_0 \int_0^\infty \left(\frac{D}{D_0}\right)^{\gamma-1} D^6 e^{-D/D_0} dD = N_0 D_0^7 \Gamma(\gamma + 6) \quad . \quad (\text{B.7})$$

In dieser Form hat \mathcal{Z} die Dimensionen m^3 , die Transformation in konventionelle Einheiten lautet

$$\mathcal{Z} \text{ in } \text{mm}^6 \text{m}^{-3} = 1.0 \times 10^{18} \mathcal{Z} \text{ in } \text{m}^3 \quad .$$

B.1.3 Mediandurchmesser

Im Gegensatz zu den beiden oben definierten charakteristischen Durchmessern sind die Mediandurchmesser bezüglich der Anzahl (\tilde{D}_N) oder des Volumens (\tilde{D}_V) möglicherweise die robustesten spektralen Größenskalen. Leider können für die Γ -Funktion aus Gl. (B.1) diese Größen nicht analytisch bestimmt werden, es sei denn für sehr einfache Fälle.

Die Definition der Mediandurchmesser verlangt nämlich

$$\int_0^{\tilde{D}_N} n(D) dD = \frac{N}{2} \quad , \quad \frac{\pi}{6} \rho_h \int_0^{\tilde{D}_V} n(D) D^3 dD = \frac{\rho q}{2} \quad . \quad (\text{B.8})$$

Für $\gamma = 1$, d. h. eine Exponentialverteilung, ist der Anzahlmedian $\tilde{D}_N = \ln 2 D_0$, während man für den Volumenmedian mit Gl. (C.2) $\tilde{D}_V = 3.67 D_0$ nur noch numerisch findet. Für andere Werte von γ müssen \tilde{D}_N und \tilde{D}_V ebenfalls numerisch berechnet werden mithilfe von

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\gamma)} \tilde{D}_N^{n+\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma)}{2} \quad (\text{B.9})$$

$$\tilde{D}_N(\gamma) \simeq 2.67 + \gamma - 3 \quad ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+\gamma+3)} \tilde{D}_V^{n+\gamma+3} = \frac{\Gamma(\gamma+3)}{2} \quad (\text{B.10})$$

$$\tilde{D}_V(\gamma) = \tilde{D}_N(\gamma+3) \simeq 2.67 + \gamma$$

unter Verwendung von Gl. (C.3). Für die drei Hydrometeoriklassen findet man diese Werte in Tab. B.1.

B.1.4 Fallgeschwindigkeiten

Vorausgesetzt, analytische Ausdrücke für die asymptotische Fallgeschwindigkeit $v_{t0}(D)$ einer bestimmten Hydrometeorart als Funktion des (äquivalenten) Durchmessers D liegen vor, dann kann die massengewichtete Fallgeschwindigkeit unter Verwendung des dritten Moments \mathcal{M}^3 aus Gl. (B.4) und einer höhenabhängigen Geschwindigkeitskorrektur berechnet werden. Diese berücksichtigt entweder die Dichte (Foote und du Toit, 1969) oder den Luftdruck (Starr und Cox, 1985)

$$v_t = v_{t0} \left(\frac{\rho_{00}}{\rho} \right)^{0.4}, \quad v_t = v_{t0} \left(\frac{40 \text{ kPa}}{p} \right)^{1/3}$$

und führt auf

$$v_t(\rho q) = \frac{N_0}{\mathcal{M}^3} \int_0^\infty \left(\frac{D}{D_0} \right)^{\gamma-1} D^3 v_t(D) e^{-D/D_0} dD \quad . \quad (\text{B.11})$$

Die schwierige Aufgabe, ein universelles Fallgesetz $v_t(D)$ für Wassertropfen aller Größen zu gewinnen wird von Rogers et al. (1993) angegangen. Für Eiskristalle wird dieses Thema bei Starr und Cox (1985) und in ganz allgemeinem Zusammenhang von Pruppacher und Klett (1997) behandelt.

Die Massenflußdichte oder Niederschlagsrate der Hydrometeore \mathcal{R} kann in einer ruhenden Atmosphäre ebenfalls aus einer Beziehung für $v_t(D)$ und \mathcal{M}^3 bestimmt werden:

$$\mathcal{R} = \frac{\pi}{6} \rho_h N_0 \int_0^\infty \left(\frac{D}{D_0} \right)^{\gamma-1} D^3 v_t(D) e^{-D/D_0} dD = v_t(\rho q) \rho q \quad . \quad (\text{B.12})$$

Während \mathcal{R} in $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$ gegeben ist, lautet die Transformation in konventionelle Einheiten

$$\mathcal{R} \text{ in } \text{mm h}^{-1} = \frac{3.6 \times 10^6}{\rho_h} \mathcal{R} \text{ in } \text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1} \quad .$$

B.2 Radarreflektivitätsfaktoren

Da die Berechnung der Radarreflektivität \mathcal{Z} sehr stark von der Genauigkeit der involvierten Charakteristika des Wolkenmodells abhängt, ist es wichtig, eine Formel für \mathcal{Z} abzuleiten, die so viele prognostische Variablen des Modells und so wenig spektrale Parameter der Hydrometeorverteilungen enthält wie möglich. Für ein Schema der Wolkenmikrophysik vom Kessler-Typ (Kessler, 1969) ist der Hydrometeor Gehalt ρq die Hauptvariable, die zur Parametrisierung herangezogen werden sollte. Zusätzlich, und abhängig davon, ob das zugrunde liegende Spektrum zwei oder drei freie Parameter enthält, müssen dann noch eine oder zwei weitere Größen spezifiziert werden. Das Ziel der folgenden Überlegung ist es daher, die Zahl der notwendigen Spektralparameter zu minimieren und die verbleibenden durch geeignete Kombinationen der Momente zu ersetzen.

B.2.1 Die Ansätze von Smith und Kessler

Durch Eliminierung von \mathcal{R} aus den \mathcal{Z} - \mathcal{R} und ρq - \mathcal{R} Beziehungen nach Marshall und Palmer (1948) kamen Smith et al. (1975) auf folgendes \mathcal{Z} - ρq Potenzgesetz:

$$\frac{\mathcal{Z}_r}{\text{mm}^6 \text{m}^{-3}} = 2.4 \times 10^4 \left(\frac{\rho q_r}{\text{g m}^{-3}} \right)^{1.82} \quad . \quad (\text{B.13})$$

Diese Funktion wurde bis jetzt zur Standardform für die Berechnung der Reflektivität aus dem Regenwassergehalt, auch in der Analysesoftware der Doppler Radars am Institut für Meteorologie und Klimaforschung. Aber wie schon Smith et al. (1975) anmerken, ist die Gl. (B.13) dem Kessler'schen Ansatz unterlegen. Dieser integriert nämlich das Marshall–Palmer Spektrum und berechnet Z_r indem der spektrale Parameter λ_r (oder D_{0r}^{-1}) durch den Regenwassergehalt ρq_r ersetzt wird. Das führt auf

$$Z_r = 720 \left(\frac{1}{\pi \rho_w} \right)^{7/4} N_{0r}^{-3/4} (\rho q_r)^{7/4} . \quad (\text{B.14})$$

Nicht nur der Exponent von $7/4$ ist verschieden von den 1.82 in Gl. (B.13), sondern jetzt variiert Z auch mit dem spektralen Parameter N_0 . Der kleinere Exponent führt hier aber zu geringeren Reflektivitätswerten bei großen Hydrometeorgehalten ρq .

Mit dem typischen Marshall–Palmer Wert von $N_{0r} = 8.0 \times 10^6 \text{ m}^{-4}$ kommt dann

$$\frac{Z_r}{\text{mm}^6 \text{ m}^{-3}} = 2.05 \times 10^4 \left(\frac{\rho q_r}{\text{g m}^{-3}} \right)^{7/4} . \quad (\text{B.15})$$

Die beiden Gln. (B.13) und (B.15) sind in Abb. B.1 vergleichend dargestellt. Die durchschnittliche Differenz zwischen beiden im Intervall $[10^{-3} \text{ g m}^{-3} \leq \rho q_r \leq 10^3 \text{ g m}^{-3}]$ ist sehr klein und variiert nur sehr schwach mit ρq_r bis auf $\pm 2.1 \text{ dB}$. Allerdings ist der positive Aspekt der Gl. (B.15) nach Smith et al. (1975) die Nichtüberschätzung der Reflektivität bei hohen Regenwassergehalten im Gegensatz zur Form der Gl. (B.13).

B.2.2 Der verallgemeinerte Spektralansatz

Der Kessler'sche Ansatz wurde für die vorliegende Arbeit auf das allgemeine Spektrum der Gl. (B.1) angewandt. Das führt entweder zu Ausdrücken wie den obigen mit $Z \propto (\rho q)^{7/4}$ oder auf neuartige Beziehungen, die linear vom Hydrometeorgehalt abhängen, je nachdem ob D_0 oder N_0 eliminiert werden.

Eliminierung von D_0

Eine Umstellung von Gl. (B.4) bestimmt den Parameter D_0 zu

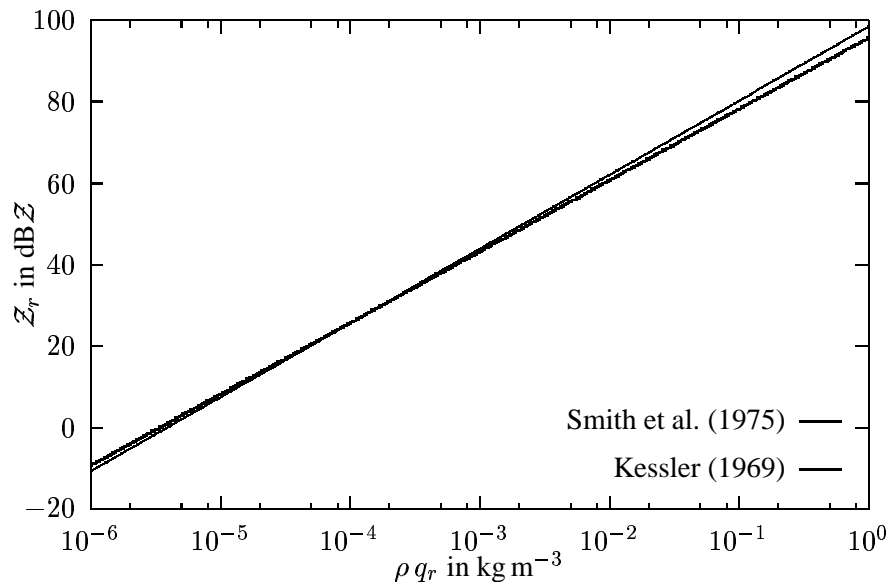


Abbildung B.1: Zwei Beziehungen zur Berechnung des Radarreflektivitätsfaktors für Regen mit einem Marshall–Palmer Spektrum ($\gamma = 1$). Die dünne Linie wurde aus Gl. (B.13) berechnet, die dicke Linie resultiert aus Gl. (B.15).

$$D_0^4 = \frac{6 \rho q}{\pi \rho_h N_0 \Gamma(\gamma + 3)} \quad (\text{B.16})$$

und kann in Gl. (B.7) eingesetzt werden, um den Reflektivitätsfaktor \mathcal{Z} zu berechnen:

$$\mathcal{Z} = \left[\frac{6}{\pi \rho_h \Gamma(\gamma + 3)} \right]^{7/4} \Gamma(\gamma + 6) N_0^{-3/4} (\rho q)^{7/4} . \quad (\text{B.17})$$

Für eine exponentielle Größenverteilung reduziert sich dies auf Kesslers Gl. (B.14).

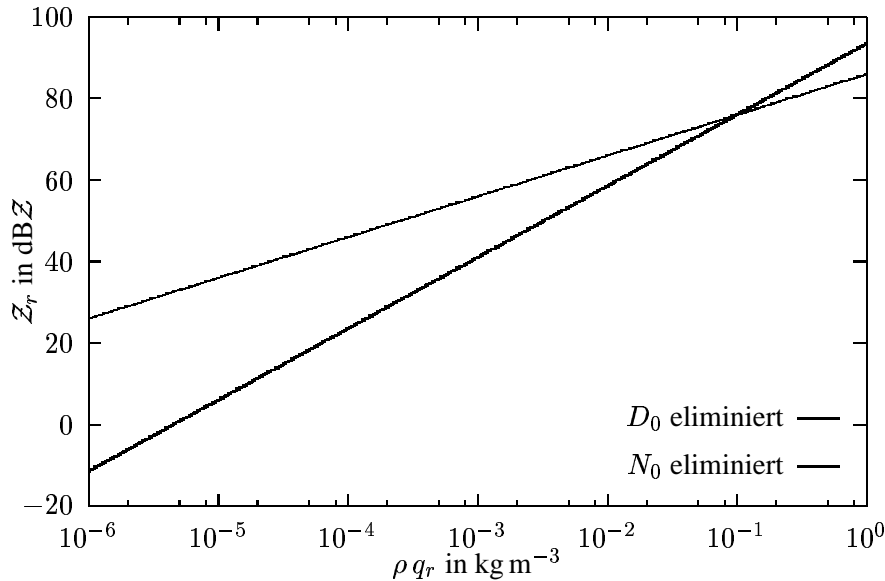


Abbildung B.2: Wie Abb. B.1, aber für Γ -Spektren mit $\gamma = 2$. Die dicke Linie entspricht Gl. (B.17), die dünne Linie folgt Gl. (B.19) unter Verwendung von $\tilde{D}_* = 1 \text{ mm}$ anstatt der alternativen Durchmesserskalen \bar{D} oder \bar{D} .

Im allgemeinen Fall sind N_0 und γ jedoch unbekannt und mit hoher Wahrscheinlichkeit auch nicht sehr leicht abzuschätzen. Darüberhinaus macht das Vorhandensein der Γ -Funktion in Gl. (B.17) deren Berechnung für nicht ganzzahlige Werte von γ recht mühevoll. Es ist daher wünschenswert, eine Formulierung der \mathcal{Z} - ρq Beziehung zu erreichen, in der nur solche Parameter beibehalten werden, für die relativ gesicherte Annahmen gemacht werden können und die prinzipiell nicht zu stark in

Raum und Zeit variieren. Eine solche Relation hätte die solideste physikalische Basis für die Berechnung des Radarreflektivitätsfaktors aus dem Hydrometeorgehalt.

Eliminierung von N_0

Die obengenannten Anforderungen können erfüllt werden, falls N_0 mit

$$N_0 = \left(\frac{\pi \rho_h}{6} \right)^{1/3} \frac{[(\gamma + 2)(\gamma + 1)\gamma]^{4/3}}{\Gamma(\gamma + 3)} N^{4/3} (\rho q)^{-1/3} \quad (\text{B.18})$$

aus der Berechnungsvorschrift für \mathcal{Z} eliminiert wird.

Führt man die Gesamtzahl N aus Gl. (B.2), den mittleren Durchmesser \bar{D} aus Gl. (B.3) und den Hydrometeorgehalt ein, dann findet man mit Gl. (B.16)

$$\mathcal{Z} = \frac{6}{\pi \rho_h} \frac{(\gamma + 5)(\gamma + 4)(\gamma + 3)}{(\gamma + 2)(\gamma + 1)\gamma} \tilde{D}_*^3 \rho q = \frac{6}{\pi \rho_h} \frac{(\gamma + 5)(\gamma + 4)(\gamma + 3)}{\gamma^3} \bar{D}^3 \rho q \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{6}{\pi \rho_h} \frac{(\gamma + 5)(\gamma + 4)}{(\gamma + 3)^2} \bar{D}^3 \rho q \quad (\text{B.20})$$

$$= \frac{6}{\pi \rho_h} (\gamma + 5)(\gamma + 4)(\gamma + 3) D_0^3 \rho q . \quad (\text{B.21})$$

Man beachte, daß durch die Substitution von entweder

$$\frac{\tilde{D}_*^3}{(\gamma + 2)(\gamma + 1)\gamma} = D_0^3 \quad , \quad \left(\frac{\bar{D}}{\gamma}\right)^3 = D_0^3 \quad \text{oder} \quad \left(\frac{\bar{D}}{\gamma + 3}\right)^3 = D_0^3$$

die Gln. (B.19–B.21) in die Form von Gl. (B.17) zurückgeführt werden können.

Damit liegen lineare Funktionen $\mathcal{Z}(\rho q)$ vor, die nur noch Annahmen bezüglich des spektralen Parameters γ und eines der vorgestellten Durchmesser beinhalten. Verglichen mit \bar{D} erscheint der mittlere Durchmesser \bar{D} robuster gegenüber mikrophysikalischen Prozessen unter den Hydrometeorarten zu sein und ist außerdem leichter für exemplarische Fälle abzuschätzen. Weiterhin enthalten die Gln. (B.19–B.21) keine Γ -Funktionen mehr, sondern lediglich einfache Polynome von γ . Die Abb. B.2 zeigt die beiden unterschiedlichen Beziehungen (B.17) mit der dicken und (B.19) mithilfe der dünnen Linie für $D_0 = 1$ mm und $\gamma = 2$ auf und offenbart sehr große quantitative Differenzen zwischen beiden.

Wie sind diese so unterschiedlichen Beziehungen (B.17) und (B.19) zu erklären, die ja keineswegs austauschbare Ergebnisse liefern? Offenbar liegen den beiden Varianten gänzlich andere spektrale Größenverteilungen zugrunde. Dies verdeutlicht exemplarisch die Abb. B.3, in der die beiden Fälle vereinfachend für exponentielle Marshall–Palmer Spektren dargestellt sind. Im Teilbild a) wird N_0 konstant gehalten, während D_0 variiert. Dies entspricht den Voraussetzungen von Gl. (B.17). Teilbild b) dagegen hält D_0 konstant und läßt N_0 freien Spielraum, was Gl. (B.19) und den N_0 -Sprüngen aus der Arbeit von Waldvogel (1974) entspricht. Es wird klar, daß bei einer Zunahme von D_0 in a)

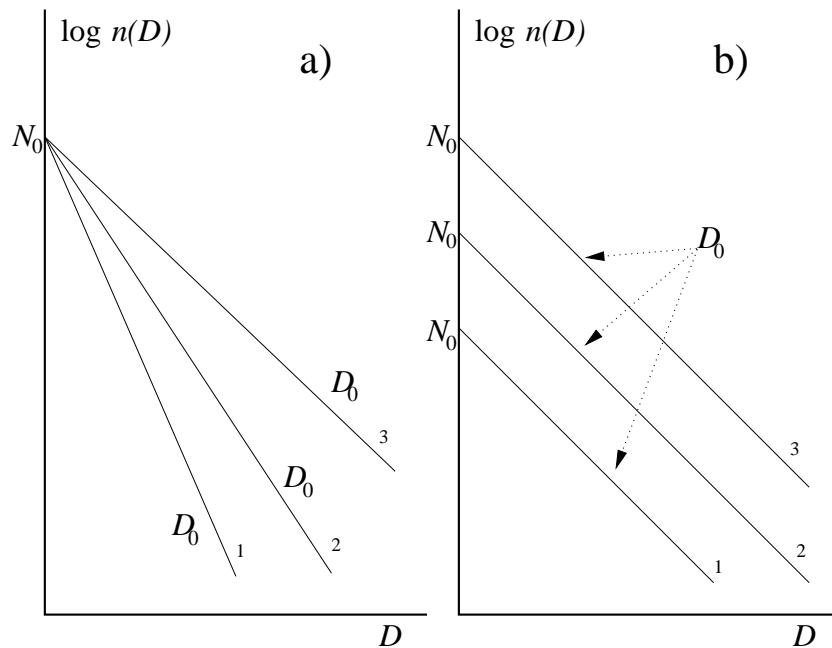


Abbildung B.3: Zwei Formen exponentieller Anzahlspektren $n(D)$ nach Marshall und Palmer (1948). Im Fall a) gilt $N_0 = \text{const.}$, im Fall b) ist $D_0 = \text{const.}$.

vorwiegend die Zahl größerer Hydrometeore erhöht wird und deshalb $\mathcal{Z} \propto D^6$ stark ansteigen muß. In b) nehmen von Spektrum 1 bis 3 mit N_0 alle Teilchengrößen um einen festen Faktor zu, gleichzeitig sind schon bei kleinen N_0 -Werten nennenswerte Mengen größer Partikeln vorhanden, so daß in diesem Fall \mathcal{Z} schon bei kleinem Hydrometeorergehalt relativ groß ist, dafür aber schwächer (nämlich nur linear) mit ρq anwächst. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß sich bei Annahme eines Potenzgesetzes für $v_t = aD^b$ dann auch für die \mathcal{Z} - \mathcal{R} Beziehung ein lineares Gesetz ergibt:

$$\mathcal{Z} \propto \mathcal{R} \quad .$$

Weil Spektren, die sich wie in Abb. B.3 b) verhalten, in erster Linie beim Wechsel von stratiformem zu konvektivem Niederschlag beobachtet werden (Waldvogel, 1974) und somit relativ selten sind, beschränken sich die meisten Arbeiten bei der Reflektivitätsberechnung auf Gl. (B.17). Das gleiche gilt für die vorliegende Dissertation, die sich ausschließlich konvektiven Wolken widmet.

